Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 17: integrali generalizzati; funzioni definite da integrali.

Esercizio 1. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-5x}dx.$$

Svolgimento.
Sia $b > 0$. Calcoliamo

$$\int_0^b e^{-5x}dx = \left[-\frac{1}{5}e^{-5x}\right]_0^b = -\frac{1}{5}e^{-5b} + \frac{1}{5}.$$

Prendendo il limite per $b \to +\infty$ otteniamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-5x}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{5}e^{-5b} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Esercizio 2. L'energia E (in Joules) necessaria per separare due cariche q_1 e q_2, originariamente ad una distanza a, fino ad una distanza b, è data da

$$E = \int_a^b k\frac{q_1 q_2}{r^2}\, dr,$$

dove q_1 e q_2 sono le cariche in Coulombs, a e b sono le distanze misurate in metri e $k = 9 \cdot 10^9$.
Si trovi l'energia necessaria per separare un protone da un elettrone (di cariche opposte pari a $1.6 \cdot 10^{-19}$ Coulombs) da una distanza iniziale di $R_B = 5.3 \cdot 10^{-11} m$ (pari al raggio di Bohr) fino ad infinito.

Svolgimento.

$$E = \int_{R_B}^{+\infty} k\frac{q_1 q_2}{r^2}dr = kq_1q_2 \lim_{b\to+\infty}\int_{R_B}^{b}\frac{1}{r^2}dr =$$
$$= kq_1q_2 \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{R_B}\right) = k\frac{q_1q_2}{R_B} \simeq 4.35 \cdot 10^{-18} J.$$

Esercizio 3. Si stabilisca se la funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2}$$

è integrabile in senso generalizzato sull'insieme

$$E = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)^T|| \in [\pi, +\infty)\}.$$

Svolgimento.
La funzione f è infinitesima per $||(x,y)^T|| \to +\infty$ dell'ordine di $||(x,y)^T||^{-4}$, e la dimensione dello spazio è 2. Per il criterio di convergenza la funzione f è assolutamente integrabile in senso generalizzato sull'insieme E. Di conseguenza è integrabile in senso generalizzato sullo stesso insieme.

Esercizio 4. Si stabilisca se le funzioni

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

sono integrabili in senso generalizzato sull'intervallo $(0, +\infty)$, e in caso positivo si calcolino tali integrali.

Svolgimento.

La funzione $|f|$ è infinitesima per $x \to +\infty$, ma purtroppo non tende a 0 in modo sufficientemente rapido (cioè non è un infinitesimo di ordine > 1). Si può provare che la funzione $|f|$ non è integrabile. Infatti, su tutti gli intervalli del tipo $[2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}]$, si ha $|f(x)| \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{8k+1}}$, e quindi

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} |f(x)|\, dx \geq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{8k+1}}.$$

Mostriamo che invece la funzione f è integrabile su $[0, +\infty)$.

Si può scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

Il primo addendo non crea problemi in quanto la funzione $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ è infinita di ordine $\frac{1}{2}$ per $x \to 0$. Studiamo il secondo addendo: possiamo scrivere

$$\int_{\pi}^{b} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \right]_{\pi}^{b} + \int_{\pi}^{b} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx;$$

e pertanto

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = -\frac{\sin \pi}{\sqrt{\pi}} + \lim_{b \to +\infty} \frac{\sin b}{\sqrt{b}} + \int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx.$$

Poiché la funzione $\dfrac{1}{2} \dfrac{\sin x}{x^{3/2}}$ è infinitesima di ordine $> 1 + \frac{1}{4}$, questa funzione è assolutamente integrabile e quindi è anche integrabile.

Si può concludere che la funzione f è integrabile (ma non assolutamente integrabile) in senso generalizzato sull'intervallo $(0, +\infty)$.

In modo simile si verifica che la funzione g è integrabile (ma non assolutamente integrabile) in senso generalizzato sull'intervallo $(0, +\infty)$.

Vogliamo ora calcolare il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$.

Ricordiamo l'importante integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}.$$

Questo significa che

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ponendo $t = \sqrt{x}y$ e osservando che $dt = \sqrt{x}dy$ si ottiene

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-xy^2}\, \sqrt{x}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

o anche

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Dall'ultima equazione, moltiplicando per $\cos x$, si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \cos x \cdot e^{-xy^2}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}.$$

Integrando rispetto alla variabile x si ha ancora

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos x \cdot e^{-xy^2}\, dy \right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Invertendo l'ordine di integrazione nell'integrale al primo membro (la cosa è giustificata dal fatto che la funzione è integrabile), si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos x \cdot e^{-xy^2}\, dx \right) dy.$$

Una primitiva della funzione $\cos x \cdot e^{-xy^2}$ è $\dfrac{e^{-xy^2}}{1+y^4}\left(-y^2 \cos x + \sin x\right)$, come si può verificare integrando successivamente due volte per parti.

Si ottiene pertanto

$$\int_0^{+\infty} \cos x \cdot e^{-xy^2}\, dx = \frac{y^2}{1+y^4}.$$

L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4}\, dy$ si può calcolare, con un po' di fatica, utilizzando il metodo della decomposizione di Hermite in frazioni semplici o, più agevolmente, utilizzando la teoria dei residui dell'analisi complessa. Il valore di tale integrale è $\pi\frac{\sqrt{2}}{4}$.

In conclusione otteniamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \pi \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

In modo simile si può provare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Esercizio 5. Si dica per quali valori del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \left(\frac{1}{\mathrm{tg}(x)}\right)^{\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Svolgimento.

Sia $\alpha > 0$. La funzione f è allora limitata in un intorno sinistro di $\frac{\pi}{2}$ e quindi non vi sono problemi nell'estremo destro dell'intervallo.

La funzione f è invece infinita in 0 di ordine α. Posso usare il criterio dell'ordine di infinito essendo la funzione positiva nell'intervallo. La funzione sarà pertanto integrabile nell'intervallo se $0 < \alpha < 1$.

Se $\alpha = 0$ la funzione è costante e quindi è integrabile nell'intervallo.

Sia $\alpha < 0$. In questo caso è l'estremo sinistro a non creare problemi perché la funzione è infinitesima in tale punto. Nel punto $\frac{\pi}{2}$ la funzione invece è infinita di ordine $-\alpha$ e quindi la funzione risulta integrabile se $-1 < \alpha < 0$.

In definitiva la funzione f risulta integrabile nell'intervallo indicato se e solo se $\alpha \in (-1, 1)$.

Esercizio 6. Si provi che le funzioni $\sin(x^2)$ e $\cos(x^2)$ sono integrabili in senso generalizzato sull'intervallo $[0, +\infty)$. Si calcoli poi il loro valore.

(Gli integrali $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx$ e $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$ sono noti come Integrali di Fresnel).

Svolgimento.

È semplice convincersi che tali funzioni non sono assolutamente integrabili sull'intervallo.

Studiamo la funzione $\sin(x^2)$. Il caso di $\cos(x^2)$ sarà simile.

Per evitare problemi nella divisione per x studieremo l'integrabilità nell'intervallo $[\sqrt{2\pi}, +\infty)$. È chiaro che la funzione è integrabile in $[0, +\infty)$ se e solo se lo è in $[\sqrt{2\pi}, +\infty)$. Mediante la sostituzione $u = x^2$ possiamo calcolare, per $b > \sqrt{2\pi}$,

$$\int_{\sqrt{2\pi}}^{b} \sin(x^2)dx = \int_{2\pi}^{b^2} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du.$$

Ricordando ora (esercizio 4) che la funzione $\frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}$ è integrabile sull'intervallo $[\pi, +\infty)$, si conclude

$$\int_{\sqrt{2\pi}}^{+\infty} \sin(x^2)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{2\pi}^{b^2} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du \in \mathbb{R},$$

e pertanto la funzione $\sin(x^2)$ è integrabile sull'intervallo $[0, +\infty)$.

Per calcolare i valori di questi integrali, ricordiamo, dall'esercizio 4, che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Poniamo $x = t^2$, allora $dx = 2t\, dt$; sostituendo nell'integrale si ottiene

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t^2}{t} 2tdt = 2 \int_0^{+\infty} \cos t^2\, dt,$$

e pertanto

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

Nello stesso modo si può provare che $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

Esercizio 7. Si calcoli la derivata (rispetto alla variabile x) della funzione

$$f(x) = \int_0^{x^2} \log(\sqrt{x^2 + t^2})\, dt.$$

Svolgimento. Si può pensare la funzione f come funzione composta dalla funzione

$$g(u, v) = \int_0^{u} \log(\sqrt{v^2 + t^2})\, dt;$$

con le funzioni $u(x) = x^2$ e $v(x) = x$.

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte ed il teorema di derivazione sotto il segno integrale si ottiene:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \log(\sqrt{x^2 + t^2})\, dt = \log(\sqrt{x^2 + x^4}) \cdot 2x + \int_0^{x^2} \frac{d}{dx} \log(\sqrt{x^2 + t^2})\, dt = 2x \log(\sqrt{x^2 + x^4}) +$$

$$+ \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + t^2}}\, dt = 2x \log(\sqrt{x^2 + t^2}) + \int_0^{x^2} \frac{1}{1 + (\frac{t}{x})^2} \frac{1}{x}\, dt = 2x \log(\sqrt{x^2 + x^4}) + \operatorname{arctg} x.$$

Esercizio 8. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(xt)}\, dt.$$

Svolgimento. Si osservi che la funzione $\dfrac{t}{\cos^2(xt)}$ è la derivata della funzione $\mathrm{tg}(xt)$.

Dunque

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(xt)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2(xt)}\,dt.$$

Poiché

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}(xt)\,dt = -\frac{\log\left(\cos\frac{\pi x}{4}\right)}{x},$$

si ottiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 xt}\,dt = \frac{\frac{\pi}{4}x\mathrm{tg}(\frac{x\pi}{4}) + \log\left(\cos(\frac{x\pi}{4})\right)}{x^2}.$$