**Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.**
**Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3**
**Dott. Franco Obersnel**

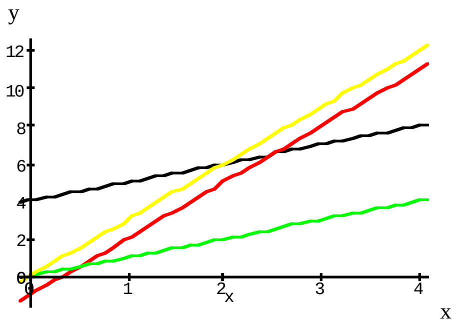
*Lezione 16: cambiamento di variabili nell'integrale di Riemann.*

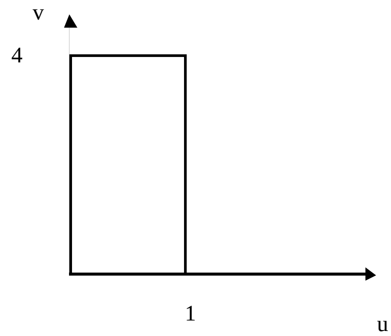
**Esercizio 1.** Si calcoli l'integrale

$$\iint_D (3x-y)^{\frac{1}{5}} \left(-\frac{x}{4}+\frac{y}{4}\right)\, dxdy,$$

nel parallelogramma delimitato dalle rette $y=3x$, $y=x$, $y=3x-1$, $y=x+4$.

*Svolgimento.*
Si calcolano velocemente i vertici del parallelogramma: $(0,0)^T$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})^T$, $(\frac{5}{2},\frac{13}{2})^T$, $(2,6)^T$.




Si può calcolare l'integrale direttamente, oppure si può considerare una trasformazione lineare di coordinate che lo renda più semplice. Si consideri ad esempio la seguente:
$u=3x-y$, $v=y-x$, e l'inversa $x=\dfrac{u+v}{2}$, $y=\dfrac{u+3v}{2}$.
La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix};$$

e il suo determinante è $\frac{1}{2}$.
La trasformazione lineare manda i vertici del parallelogramma rispettivamente nei punti $(0,0)^T$, $(1,0)^T$, $(1,4)^T$ e $(0,4)^T$. L'integrale diventa allora

$$\int_0^1 \left(\int_0^4 u^{\frac{1}{5}} \frac{1}{4} v \,\frac{1}{2}\, dv\right) du = \frac{5}{6}.$$

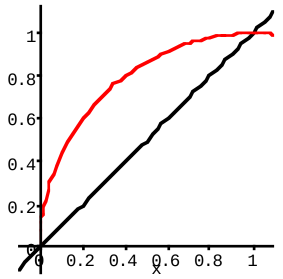
**Esercizio 2.** Si calcoli l'integrale

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy,$$

dove

$$D=\{(x,y)^T \in \mathrm{I\!R}^2 : (x-1)^2+y^2 \leq 1;\ y \geq x\}.$$

*Svolgimento.*
Utilizzeremo coordinate polari. Dunque $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.




La disequazione $(x-1)^2+y^2 \le 1$ diventa $\rho^2 \le 2\rho\cos\vartheta$, che si semplifica in $\rho \le 2\cos\vartheta$ per $\rho > 0$. Poiché $y \ge x$ si deve imporre $\rho\sin\vartheta \ge \rho\cos\vartheta$, cioè $\operatorname{tg}\vartheta \ge 1$, o $\vartheta \ge \frac{\pi}{4}$.

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate è $\rho$. Calcolando l'integrale si ottiene

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\cos\vartheta} \rho\,\rho\,d\rho \right) d\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos\vartheta)^3}{3}\,d\vartheta = \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\vartheta\right)\cos\vartheta\,d\vartheta$$

ponendo $t = \cos\vartheta$ l'ultimo integrale diventa

$$\frac{8}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (1-t^2)\,dt = \frac{8}{3}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{2}{9}(8-5\sqrt{2}).$$

**Esercizio 3.**
Si calcoli il volume del solido

$$D = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2 \le 4;\ \ 0 \le z \le x^2+y^2\}.$$

*Svolgimento.*

Si tratta della regione compresa tra i due cilindri di raggio 1 e 2 rispettivamente, che si trova sotto al paraboloide di equazione $z = x^2+y^2$.

Conviene usare coordinate cilindriche. Posto dunque $x = \rho\cos\vartheta$ e $y = \rho\sin\vartheta$ si ottengono le condizioni $0 \le z \le \rho^2$ e $1 \le \rho^2 \le 4$.

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate è $\rho$. Calcolando l'integrale si ottiene

$$\int_1^2 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\rho^2} \rho\,dz \right) d\vartheta \right) d\rho = 2\pi \int_1^2 \rho^3\,d\rho = \frac{15}{2}\pi.$$

**Esercizio 4.**
Si calcoli il momento di inerzia rispetto al piano $xy$ $I_{xy} = \int_S z^2 dm$ del solido $S$:

$$S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4;\ \ z \ge 0;\ \ z^2 \ge x^2+y^2\}.$$

*Svolgimento.*

Conviene usare coordinate sferiche. Poniamo $x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = \rho\cos\varphi$. Si ha dunque $\rho^2 = x^2+y^2+z^2$.

Si ottengono le relazioni $1 \le \rho^2 \le 4$; $\rho\cos\varphi \ge 0$; $\rho^2\cos^2\varphi \ge \rho^2\sin^2\varphi$.

Dunque il dominio in coordinate sferiche è $1 \le \rho \le 2$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ e $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate è $\rho^2 \sin\varphi$. Calcolando l'integrale si ottiene

$$\int_1^2 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \cos^2\varphi\, \rho^2 \sin\varphi\, d\varphi \right) d\vartheta \right) d\rho = 2\pi \int_1^2 \rho^4 \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi \sin\varphi\, d\varphi \right) d\rho =$$

$$= 2\pi \frac{31}{5} \left( - \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^2 dt \right) = \frac{62}{5}\pi \frac{4-\sqrt{2}}{12} = \frac{31}{30}\pi(4-\sqrt{2}).$$

**Esercizio 5.**
Si calcoli l'integrale

$$\iint_E (x+y)\ dxdy$$

dove $E$ è la regione interna all'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Svolgimento.*

La regione interna ad un'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ si può descrivere mediante la funzione $\Phi(\rho, \vartheta) = (a\rho\cos\vartheta, b\rho\sin\vartheta)^T$ con $0 \le \rho < 1$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$. Useremo dunque questo cambiamento di coordinate. La matrice Jacobiana di $\Phi$ è

$$\begin{pmatrix} a\cos\vartheta & -a\rho\sin\vartheta \\ b\sin\vartheta & b\rho\cos\vartheta \end{pmatrix};$$

e il suo determinante è $ab\rho$.

Calcoliamo l'integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^1 (a\rho\cos\vartheta + b\rho\sin\vartheta)\, ab\rho\, d\rho \right) d\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{3} \left( a^2 b\cos\vartheta + ab^2 \sin\vartheta \right)\, d\vartheta = 0.$$