Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 15: teoremi di riduzione per gli integrali di Riemann; integrazione su sottoinsiemi limitati.

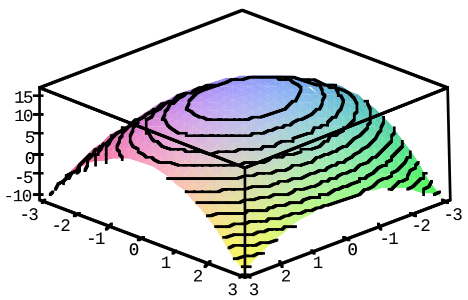
Esercizio 1. Si calcoli il volume del solido delimitato dal paraboloide ellittico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, dai piani $x = 2$, $y = 2$ e dai 3 piani coordinati.

Svolgimento.

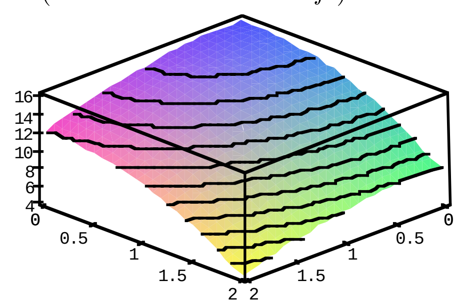
Possiamo considerare la funzione $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ definita sul rettangolo $R = [0, 2] \times [0, 2]$. Il solido di cui si cerca il volume è proprio il sottografico della funzione f (cioè la regione dello spazio compresa tra R e la superficie in $\mathbb{R}^3$ definita dall'equazione $z = 16 - x^2 - 2y^2$), dunque il suo volume si può interpretare come l'integrale della funzione esteso al rettangolo R.

$$\int_R f(x,y)\,dm = \int_0^2 \left(\int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left[16y - x^2 y - \frac{2}{3}y^3\right]_0^2 dx =$$

$$= \int_0^2 \left(32 - 2x^2 - \frac{16}{3}\right) dx = \left[32x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{16}{3}x\right]_0^2 = 64 - \frac{16}{3} - \frac{32}{3} = 48.$$



(Grafico della funzione f.)



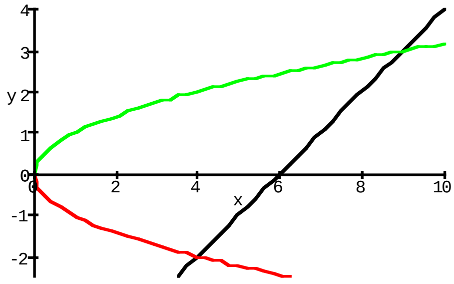
(Grafico della funzione f ristretta al rettangolo R.)

Esercizio 2. Si calcoli l'integrale

$$\int_D 4y^3\,dm$$

dove D è l'insieme del piano delimitato dalle curve $y = x - 6$ e $y^2 = x$.

Svolgimento.



Calcoliamo le intersezioni tra la parabola $y^2 = x$ e la retta $y = x - 6$. Si ottiene $y = 3$ oppure $y = -2$. Si ottengono allora gli estremi: per $-2 \le y \le 3$ e per $y^2 \le x \le y + 6$. L'integrale diventa

$$\int_{-2}^{3} \left(\int_{y^2}^{y+6} 4y^3 \, dx \right) dy = \int_{-2}^{3} 4y^3(y + 6 - y^2) \, dy = \left[\frac{4}{5}y^5 + 6y^4 - \frac{2}{3}y^6 \right]_{-2}^{3} = \frac{500}{3}.$$

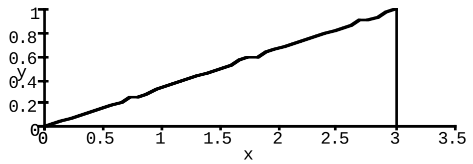
Esercizio 3. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^1 \left(\int_{3y}^{3} e^{x^2} \, dx \right) dy.$$

Svolgimento.

Operando direttamente sul problema così come viene proposto si incontrano notevoli difficoltà. Conviene allora invertire l'ordine di integrazione. La regione considerata è l'insieme dei punti

$$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 3y \le x \le 3\} = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3;\ 0 \le y \le \frac{1}{3}x\}.$$



Perciò l'integrale si può scrivere

$$\int_0^3 \left(\int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} \, dy \right) dx = \int_0^3 e^{x^2} \frac{x}{3} \, dx = \frac{1}{6}(e^9 - 1).$$

Esercizio 4. Si calcoli l'integrale

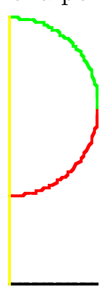
$$\iint_E \frac{x}{y} \, dxdy$$

nella regione

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ x^2 + (y - 2)^2 \le 1\}.$$

Svolgimento.

La regione E è la porzione del disco di centro $(0, 2)^T$ e raggio unitario contenuta nel primo quadrante.



Si ha allora $1 \leq y \leq 3$ e $0 \leq x \leq \sqrt{1-(y-2)^2}$ e l'integrale si può scrivere come

$$\int_1^3 \left(\int_0^{\sqrt{4y-y^2-3}} \frac{x}{y}\, dx \right) dy = \int_1^3 \frac{1}{2y}(4y-y^2-3)\, dy = \left[2y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}\log|y| \right]_1^3 = 2 - \frac{3}{2}\log 3.$$

Esercizio 5. Si trovino la massa ed il centro di massa di una lamina triangolare di vertici $(0,0)^T$, $(1,0)^T$, $(0,2)^T$ la cui densità è descritta dalla funzione $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$.

Svolgimento.
Ricordo che la massa è data da

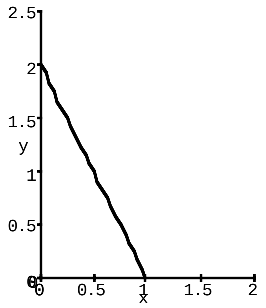
$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dxdy$$

e le coordinate del centro di massa sono

$$\hat{x} = \frac{1}{m} \iint_D x\rho(x,y)\, dxdy \text{ e } \hat{y} = \frac{1}{m} \iint_D y\rho(x,y)\, dxdy.$$

La retta congiungente i punti $(0,2)^T$ e $(1,0)^T$ è la retta $y = 2-2x$.

La regione considerata è il triangolo che ha per lati il segmento di asse x compreso tra 0 e 1, il segmento di asse y compreso tra 0 e 2 e il segmento della retta $y = 2-2x$ compreso tra $(0,2)^T$ e $(1,0)^T$.



Calcoliamo la massa:

$$m = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} (1+3x+y)\ dy \right) dx = \int_0^1 \left((1+3x)(2-2x) + \frac{1}{2}(2-2x)^2 \right) dx = \frac{8}{3}.$$

Le coordinate del centro di massa sono

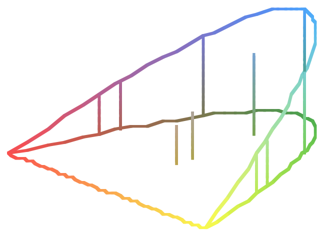
$$\hat{x} = \frac{3}{8} \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} x(1+3x+y)\, dy \right) dx = \frac{3}{8};$$

$$\hat{y} = \frac{3}{8} \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} y(1+3x+y)\, dy \right) dx = \frac{3}{8} \int_0^1 \frac{1}{2} \left((2-2x)^2 + 3x\frac{1}{2}(2-2x)^2 + \frac{1}{3}(2-2x)^3 \right) dx =$$

$$= \frac{3}{8} \int_0^1 4(1-x^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{1}{3}(2-2x) \right) dx = \frac{11}{16}.$$

Esercizio 6. Si calcoli il volume del solido delimitato dal cilindro $x = y^2$ e dai piani $z = 0$ e $x + z = 1$.

Svolgimento.
La proiezione del solido sul piano $z = 0$ è la regione interna alla parabola $x = y^2$. Noi consideriamo i punti che stanno sopra a questa regione e sotto al piano $x + z = 1$. Integrando per corde relative all'asse z , consideriamo l'integrale per z che va da 0 alla quota $1 - x$ (stiamo sotto al piano $x + z = 1$!).



Poi integriamo sulla regione del piano che sta sopra alla parabola $x = y^2$ e sotto la retta $x = 1$, cioè per $-1 \leq y \leq 1$ e $y^2 \leq x \leq 1$.

Si ottiene l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{1} \left(\int_{0}^{1-x} dz \right) dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2}^{1} (1 - x)\, dx \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} y^4 - y^2 + \frac{1}{2} \right) dy = \frac{8}{15}.$$