Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 14: integrale di Riemann per funzioni di due e tre variabili su rettangoli.

Esercizio 1. Utilizzando la definizione di integrale di Riemann si calcoli l'integrale della funzione $f(x,y) = x$ sul rettangolo $[0,1] \times [0,1]$.

Svolgimento.
La funzione f è integrabile perché è continua sul rettangolo. Calcoliamo il valore dell'integrale.
Sia $\delta = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1; 0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = 1\}$ una decomposizione del rettangolo $[0,1] \times [0,1]$. L'estremo inferiore della funzione f, che è anche il minimo, sul rettangolino $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ è uguale a x_{i-1} e non dipende da j.
L'estremo superiore della funzione f, che è anche il massimo, sul rettangolino $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ è uguale a x_i e anch'esso non dipende da j.
Dunque la somma inferiore e la somma superiore della funzione f relativa alla decomposizione δ si possono scrivere nel modo seguente:

$$s(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1});$$

$$S(f,\delta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i(x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1}) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}).$$

Le somme non dipendono dalla variabile y, possiamo quindi sempre considerare la decomposizione banale rispetto alla y (cioè $m = 1$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$).
Per ogni numero naturale $n > 0$ sia δ_n la decomposizione $\delta_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1; 0 < 1\}$. Si ottiene

$$s(f,\delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{1}{2}\frac{n^2 - n}{n^2} < \frac{1}{2};$$

$$S(f,\delta_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\frac{n^2 + n}{n^2} > \frac{1}{2}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\delta_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\delta_n) = \frac{1}{2},$$

l'elemento di separazione tra la classe delle somme inferiori e la classe delle somme superiori, che già sappiamo esistere, non può che essere $\frac{1}{2}$.
È dunque provato che

$$\int_R f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 2. Senza utilizzare le formule di riduzione, ma tenendo presente le proprietà di linearità dell'integrale e la definizione di integrale, si calcoli l'integrale della funzione $f(x,y) = 3x + 4y$ sul rettangolo $[0,1] \times [0,2]$.

Svolgimento.
Per le proprietà di linearità dell'integrale sappiamo che

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} (3x + 4y)\ dm = 3\int_{[0,1]\times[0,2]} x\,dm + 4\int_{[0,1]\times[0,2]} y\,dm.$$

Nello stesso modo in cui si è risolto il primo esercizio si può vedere che $\int_{[0,1]\times[0,2]} x\, dm = 1$.

In modo simile si verifica che $\int_{[0,1]\times[0,2]} y\, dm = 2$.

Il risultato finale sarà quindi $\int_{[0,1]\times[0,2]} (3x + 4y)\ dm = 11$.

Esercizio 3 Detto a il numero reale

$$a = \iint_D \sqrt{x^3 + y^3}\, dxdy\ ,$$

dove $D = [0, 1] \times [0, 1]$, si provi che $a \in [0, \sqrt{2}]$.

Svolgimento.

La funzione $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ è continua sul compatto D. Il suo minimo è 0 e il suo massimo è $\sqrt{2}$. Per il teorema della media si può concludere che

$$0 \leq \iint_D \sqrt{x^3 + y^3}\, dxdy\ \leq \sqrt{2},$$

cioè $a \in [0, \sqrt{2}]$, come si voleva dimostrare.

Esercizio 4.

Si verifichi che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x - y}{|x - y|} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}\ ,$$

è integrabile secondo Riemann sul rettangolo $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Svolgimento.

La funzione f non è continua nei punti di R del tipo $(t, t)^T$ con $0 \leq t \leq 1$. È invece continua in tutti gli altri punti. La f è inoltre limitata.

Per verificare che la funzione f è integrabile mostreremo che l'insieme dei suoi punti di discontinuità è trascurabile.

Ricordiamo che un insieme si dice trascurabile se è contenuto in un rettangolo, e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una decomposizione δ del rettangolo tale che la somma delle aree dei sottorettangolini della decomposizione che intersecano l'insieme è minore di ε.

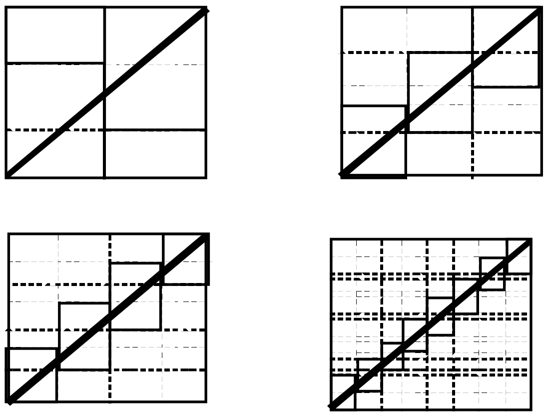
Mostriamo che il segmento di retta $\{(t, t)^T : 0 \leq t \leq 1\}$ è trascurabile.

Poiché $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n + 2}{n^2} = 0$, fissato $\varepsilon > 0$ esiste certamente un numero naturale n tale che $\dfrac{n + 2}{n^2} < \varepsilon$.

Consideriamo la decomposizione del rettangolo R definita come segue (si vedano nella figura i casi $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 8$):

$$\delta_n = \{I_i \times J_j : i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, 2n - 1\},$$

dove $I_i = [\dfrac{i - 1}{n}, \dfrac{i}{n}]$; $J_1 = [0, \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}]$, $J_2 = [\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}]$, $J_3 = [\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}]$, $J_4 = [\dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}]$, $\dots$, $J_{2n-1} = [\dfrac{n - 1}{n} - \dfrac{1}{n^2}, 1]$.



L'area dell'unione dei rettangoli di δ_n che intersecano la retta $\{(t,t)^T : 0 \leq t \leq 1\}$ è

$$(n-2) \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right) + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{n+2}{n^2} < \varepsilon.$$

(I primi $n-2$ contributi riguardano i rettangolini che non toccano i lati verticali del quadrato, gli ultimi due riguardano i rettangolini che toccano i lati verticali del quadrato; l'area di questi ultimi è più piccola rispetto a quella dei rettangolini interni; si faccia riferimento al disegno per una migliore comprensione.)