Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 13: Termini noti di tipo particolare; oscillazioni forzate; sistemi di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti.

Esercizio 1 Si risolva l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' - 3y = \cos^2 x.$$

Svolgimento.
L'equazione omogenea associata è

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0,$$

ed ammette come radici i numeri reali $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$. Dunque la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

Per trovare una soluzione particolare osserviamo che $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$.
Una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' - 3y = \frac{1}{2}\cos 2x$$

si può cercare tra le funzioni del tipo

$$y(x) = \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x.$$

Derivando tale funzione si ottiene

$$y'(x) = -2\alpha \sin 2x + 2\beta \cos 2x;$$

$$y''(x) = -4\alpha \cos 2x - 4\beta \sin 2x.$$

Sostituendo tali espressioni nell'equazione, si ottiene

$$(-4\alpha \cos 2x - 4\beta \sin 2x) - 2\,(-2\alpha \sin 2x + 2\beta \cos 2x) - 3\,(\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x) = \frac{1}{2}\cos 2x;$$

che, uguagliando i coefficienti di $\sin 2x$ e $\cos 2x$, ci fornisce il sistema

$$\begin{cases} -7\alpha - 4\beta = \frac{1}{2} \\ -7\beta + 4\alpha = 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono i valori $\alpha = -\dfrac{7}{130}$ e $\beta = -\dfrac{2}{65}$.
Dunque una soluzione particolare dell'equazione $y'' - 2y' - 3y = \frac{1}{2}\cos 2x$ è

$$y_p(x) = -\frac{7}{130}\cos 2x - \frac{2}{65}\sin 2x.$$

Dobbiamo ancora trovare una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - 2y' - 3y = \frac{1}{2}.$$

In questo caso la soluzione va cercata tra le funzioni costanti. Si vede facilmente che una soluzione particolare è la funzione $y_p(x) = -\dfrac{1}{6}$.

Dunque, la soluzione generale dell'equazione proposta è

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{7}{130}\cos 2x - \frac{2}{65}\sin 2x - \frac{1}{6}.$$

Esercizio 2. È dato un circuito elettrico RLC (resistenza- induttanza-capacità) con i componenti collegati in serie. Le leggi di Ohm e di Kirchhoff forniscono la seguente equazione: $L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$ dove I indica la corrente che circola nel circuito all'istante t, Q è la carica del condensatore all'istante t, E è la forza elettromotrice. Poiché $I = \frac{dQ}{dt}$ l'equazione diventa $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$.

Il tempo $t = 0$ indica il momento in cui si chiude il circuito, dunque si suppone $I(0) = 0$. Supponiamo inoltre che il condensatore sia inizialmente scarico, dunque $Q(0) = 0$. Si supponga infine che la forza elettromotrice sia fornita da un generatore a corrente alternata del tipo $E(t) = 100\cos(10t)$. Si calcoli la carica del condensatore e la corrente del circuito al tempo t, supponendo che la resistenza sia pari a 40 Ω, la capacità a $16 \cdot 10^{-4}F$ e l'induttanza a 1 H.

Svolgimento.

L'equazione da studiare è la seguente:

$$x'' + 40x' + 625x = 100\cos(10t),$$

(dove si è posto $x = Q$), sotto le condizioni iniziali $x(0) = 0,\ x'(0) = 0$.

L'equazione è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $z^2+40z+625 = 0$ ammette come zeri le due radici complesse coniugate $-20 \pm 15i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono pertanto tutte e sole le funzioni del tipo $x(t) = c_1 e^{-20t}\cos(15t) + c_2 e^{-20t}\sin(15t)$ con c_1 e c_2 parametri reali.

Cerchiamo una soluzione particolare.

Questa si può ricercare tra le funzioni del tipo $g_{a,b}(t) = a\cos(10t) + b\sin(10t)$. Si ha

$$g'_{a,b}(t) = -10a\sin(10t) + 10b\cos(10t)$$

e

$$g''_{a,b} = -100a\cos(10t) - 100b\sin(10t).$$

Affiché la funzione $g_{a,b}$ sia soluzione deve verificare l'equazione e quindi deve essere

$$-100a\cos(10t) - 100b\sin(10t) - 400a\sin(10t) + 400b\cos(10t) + 625a\cos(10t) + 625b\sin(10t) = 100\cos(10t),$$

da cui si ottiene $b = \frac{64}{697}$ e $a = \frac{84}{697}$.

Le soluzioni dell'equazione sono pertanto tutte e sole le funzioni del tipo

$$x(t) = e^{-20t}(c_1\cos(15t) + c_2\sin(15t)) + \frac{4}{697}(21\cos(10t) + 16\sin(10t)).$$

Calcoliamo la derivata:

$$x'(t) = e^{-20t}[(-20c_1 + 15c_2)\cos(15t) + (-15c_1 - 20c_2)\sin(15t)] + \frac{40}{697}(-21\sin(10t) + 16\cos(10t)).$$

Imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ si ottiene $c_1 = -\frac{84}{697}$ e $c_2 = -\frac{464}{2091}$.

Le funzioni che rappresentano la carica del condensatore e la corrente saranno allora rispettivamente

$$Q(t) = \frac{4}{697}\left[\frac{e^{-20t}}{3}(-63\cos(15t) - 116\sin(15t)) + (21\cos(10t) + 16\sin(10t))\right]$$

$$I(t) = \frac{1}{2091}\left[e^{-20t}(-1920\cos(15t) + 13060\sin(15t)) + 120(-21\sin(10t) + 16\cos(10t))\right].$$

Esercizio 3 Consideriamo un corpo di massa m che oscilla verticalmente in un fluido di attrito trascurabile (ad esempio un corpo agganciato ad una molla o anche un ponte soggetto a sollecitazioni). Supponiamo che sia presente una forza esterna che varia nel tempo secondo la legge $f(t) = A\sin(\omega_0 t)$. Vogliamo studiare le leggi del moto.

La seconda legge di Newton insieme alla legge di Hooke ci permette di scrivere l'equazione $ma+kx = f(t)$ che possiamo riscrivere, come consuetudine, nella forma

$$x'' + \omega^2 x = A\sin(\omega_0 t).$$

Si studino le leggi del moto e si consideri il caso particolare in cui $\omega_0 = \omega$.

Svolgimento.

L'equazione da studiare è un'equazione lineare di secondo grado completa a coefficienti costanti. L'equazione omogenea associata è $x''+\omega^2 x = 0$ ed ha come soluzioni tutte e sole le funzioni del tipo $c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t)$ con c_1 e c_2 numeri reali arbitrari.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa.

Nel caso in cui $\omega_0 \neq \omega$ una soluzione particolare si può ricercare tra le funzioni del tipo $g_{a,b}(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$. Si avrà

$$g'_{a,b}(t) = -a\omega_0\sin(\omega_0 t) + b\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

e

$$g''_{a,b}(t) = -a\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - b\omega_0^2\sin(\omega_0 t).$$

Affiché la funzione $g_{a,b}$ sia soluzione deve verificare l'equazione e quindi deve essere

$$(\omega^2 - \omega_0^2)(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)) = A\sin(\omega_0 t),$$

da cui si ottiene $a = 0$ e $b = \frac{A}{\omega^2-\omega_0^2}$.

Le soluzioni dell'equazione saranno perciò funzioni del tipo

$$x(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t) + \frac{A}{\omega^2 - \omega_0^2}\sin(\omega_0 t).$$

Si noti che tali funzioni sono limitate.

Nel caso in cui $\omega_0 = \omega$ le cose si complicano. In questo caso una soluzione particolare si può ricercare tra le funzioni del tipo $g_{a,b}(t) = at\cos(\omega t) + bt\sin(\omega t)$. Si avrà

$$g'_{a,b}(t) = a\cos(\omega t) - at\omega\sin(\omega t) + b\sin(\omega t) + bt\omega\cos(\omega t)$$

e

$$g''_{a,b} = -a\omega\sin(\omega t) - a\omega\sin(\omega t) - at\omega^2\cos(\omega t) + \omega b\cos(\omega t) + b\omega\cos(\omega t) - bt\omega^2\sin(\omega t).$$

Affiché la funzione $g_{a,b}$ sia soluzione deve verificare l'equazione e quindi deve essere

$$-2a\omega\sin(\omega t) + 2b\omega\cos(\omega t) - \omega^2 g_{a,b}(t) + \omega^2 g_{a,b}(t) = A\sin(\omega t),$$

da cui si ottiene $b = 0$ e $a = -\frac{A}{2\omega}$.

Le soluzioni dell'equazione saranno perciò funzioni del tipo

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) - \frac{A}{2\omega} t \cos(\omega t).$$

Si noti che tali funzioni sono illimitate. L'ampiezza delle oscillazioni aumenta sempre più. Tale fenomeno è noto con il nome di risonanza.

Esercizio 4. Si risolva il sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x' = ay + bz \\ y' = cz \\ z' = 0 \end{cases},$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = c_1 \\ y(0) = c_2 \\ z(0) = c_3 \end{cases}.$$

Svolgimento.
Scriviamo l'equazione in forma matriciale; posto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{e} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

il sistema diventa

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}.$$

La matrice fondamentale è dunque e^{tA}.
Poiché

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

e $A^n = 0$ per $n > 2$, si ha

$$e^{tA} = I + tA + \frac{1}{2!} t^2 A^2 = \begin{pmatrix} 1 & at & bt + \frac{1}{2}act^2 \\ 0 & 1 & ct \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché deve essere

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

la soluzione del sistema proposto è

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 at + c_3 \left(bt + \frac{1}{2}act^2\right) \\ y(t) = c_2 + c_3 ct \\ z(t) = c_3 \end{cases}.$$