Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 12: Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti.

Esercizio 1.
Si considerino l'operatore differenziale

$$L = D^5(D-2)^2(D^2+5-2D)^2;$$

e l'associata equazione differenziale lineare

$$L(y) = 0.$$

Si trovi la soluzione generale di tale equazione.

Svolgimento
L'equazione è omogenea. L'equazione caratteristica dell'equazione è

$$\lambda^5(\lambda-2)^2(\lambda^2+5-2\lambda)^2.$$

Le radici sono: $\lambda = 0$, di molteplicità 5; $\lambda = 2$ di molteplicità 2 e le radici complesse coniugate $\lambda = 1 \pm 2i$ ciascuna di molteplicità 2.

Le soluzioni sono pertanto combinazioni lineari delle seguenti funzioni: 1, t, t^2, t^3, t^4, e^{2t}, te^{2t}, $e^t \cos(2t)$, $e^t \sin(2t)$, $te^t \cos(2t)$, $te^t \sin(2t)$.

Esercizio 2. Si risolva l'equazione differenziale

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Svolgimento.
È un'equazione lineare completa di secondo grado. L'equazione omogenea associata è $y''+y=0$ e le sue soluzioni si trovano facilmente considerando l'equazione caratteristica associata $t^2+1=0$, che ha soluzioni complesse coniugate $t = \pm i$. Dunque le soluzioni dell'equazione omogenea sono combinazioni lineari di seno e coseno.

Per trovare una soluzione particolare possiamo usare il metodo della variazione delle costanti. La soluzione particolare è

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\frac{1}{\cos t}dt \quad \text{dove} \quad K(x,t) = \frac{\cos t \sin x - \cos x \sin t}{\cos t \cos t + \sin t \sin t} = \cos t \sin x - \cos x \sin t.$$

Si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\cos t \sin x - \cos x \sin t}{\cos t}\, dt = \int_{x_0}^{x} \sin x \, dt - \cos x \int_{x_0}^{x} \tan t \, dt = x \sin x + \cos x \log(\cos x).$$

La soluzione sarà dunque

$$a \cos x + b \sin x + x \sin x + \cos(x) \cdot \log(\cos x).$$

Esercizio 3.
Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 6x - 7y, \\ x(0) = 2, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Svolgimento.
Risolvendo la seconda equazione in x si ottiene

$$x = \frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y;$$

derivando rispetto a t, e sostituendo a x' e y' le espressioni date dal sistema, si ottiene

$$x' = \frac{1}{6}y'' + \frac{7}{6}y';$$

$$\frac{1}{6}y'' + \frac{7}{6}y' = 4\left(\frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y\right) - 3y;$$

che si semplifica

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

L'equazione caratteristica associata all'equazione è

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0.$$

La soluzione generale dell'equazione è pertanto

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}.$$

Sostituendo l'espressione di y nell' equazione $x = \frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y$; si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{6}(2c_1 e^{2t} - 5c_2 e^{-5t}) + \frac{7}{6}(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t});$$

da cui

$$x(t) = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}c_2 e^{-5t}.$$

Imponendo la condizione iniziale si trova infine

$$\frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 2 \qquad \text{e} \qquad c_1 + c_2 = -1;$$

da cui

$$\begin{cases} x(t) = 3e^{2t} - e^{-5t} \\ y(t) = 2e^{2t} - 3e^{-5t}. \end{cases}$$

Esercizio 4.
Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}; \\ y(\pi) = 0; \\ y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Svolgimento.
le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \sin x$. Il Wronskiano del sistema fondamentale è

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1;$$

dunque la soluzione particolare si può ottenere nel modo seguente:

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} K(x,t)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}dt \quad \text{dove} \quad K(x,t) = \frac{\cos t \sin x - \cos x \sin t}{\cos t \cos t + \sin t \sin t} = \cos t \sin x - \cos x \sin t.$$

Si ottiene

$$\frac{\sin x}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt - \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Gli integrali al secondo membro non sono calcolabili direttamente. Ne parleremo nella lezione sugli integrali generalizzati (lezione 17). Poniamo

$$\mathrm{Fsin}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

e

$$\mathrm{Fcos}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\, dt.$$

La soluzione della nostra equazione si può allora scrivere

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \mathrm{Fsin}(x) \cos x + \mathrm{Fcos}(x) \sin x;$$

e la sua derivata è

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + \mathrm{Fsin}(x) \sin x + \mathrm{Fcos}(x) \cos x.$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(\pi) = 0$ e $y'(\pi) = 0$, si ottiene $c_1 = \mathrm{Fsin}(\pi)$ e $c_2 = -\mathrm{Fcos}(\pi)$.
Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = (\mathrm{Fsin}(\pi)\mathrm{Fsin}(x)) \cos x - (\mathrm{Fcos}(\pi) - \mathrm{Fcos}(x)) \sin x.$$

Si può verificare che una forma alternativa per la nostra soluzione è la seguente:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\pi} \frac{\sin(t-x)}{\sqrt{t}}\, dt.$$

Esercizio 5. Si risolva l'equazione

$$x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0;$$

osservando che la funzione $y(x) = x^3$ è una soluzione.

Svolgimento.
L'equazione proposta è lineare del secondo ordine e si può riscrivere nella forma

$$y'' - \frac{5}{x} y' + \frac{9}{x^2} y = 0$$

per $x > 0$.

Questo è un esempio di *equazione di Eulero-Cauchy* e, grazie alla conoscenza di una soluzione, è possibile ricondurla ad un'equazione del primo ordine.

Si verifica facilmente che la funzione $y_1(x) = x^3$ è effettivamente una soluzione dell'equazione.
Chiamiamo $y_2(x)$ la seconda soluzione, da noi cercata, linearmente indipendente rispetto alla $y_1(x)$.
Poniamo poi $v(x) = \dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$ cosicché si ha $y_2(x) = v(x)y_1(x)$.
Sostituiamo $y_2(x)$ nell'equazione proposta, si ottiene

$$(vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1) - \frac{5}{x}(vy_1' + v'y_1) + \frac{9}{x^2}vy_1 = 0;$$

che, essendo $y_1'' - \frac{5}{x}y_1' + \frac{9}{x^2}y_1 = 0$, si riduce a

$$y_1v'' + (2y_1' - \frac{5}{x}y_1)v' = 0;$$

cioè, scrivendo x^3 al posto di y_1 e ponendo $u = v'$,

$$x^3u' + x^2u = 0.$$

L'ultima equazione scritta è lineare del primo ordine, e quindi si risolve agevolmente; una soluzione di tale equazione è $u(x) = \frac{1}{x}$, e quindi $v(x) = \log x$ e la soluzione cercata $y_2(x)$, indipendente dalla y_1, è $y_2(x) = x^3 \log x$.

La soluzione generale della nostra equazione sarà pertanto

$$y(x) = c_1x^3 + c_2x^3 \log x.$$

Il metodo descritto nel presente esercizio si può applicare in situazioni molto più generali. La conoscenza di una soluzione dell'equazione permette di ridurre l'equazione ad una nuova equazione di ordine un'unità inferiore all'ordine dell'equazione di partenza.