Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 10: equazioni lineari del primo ordine, un tipo di equazioni del secondo ordine.

Esercizio 1.
Si risolva l'equazione ordinaria lineare del primo ordine

$$y' + 3x^2y = 6x^2.$$

Svolgimento.
È un'equazione lineare completa del primo ordine. Dobbiamo dunque prima risolvere l'equazione omogenea associata e poi trovare una soluzione particolare.
L'equazione omogenea associata è

$$y' = -3x^2y.$$

Il coefficiente del termine y è $-3x^2$; una primitiva della funzione $-3x^2$ è la funzione $-x^3$. Dunque una soluzione dell'equazione omogenea è e^{-x^3}.
Si potrebbe cercare la soluzione particolare con il metodo della variazione della costante. In questo caso però basta osservare l'equazione un momento per scoprire che la funzione costante $f(x) = 2$ è soluzione dell'equazione completa.
Le soluzioni dell'equazione proposta saranno pertanto le funzioni del tipo

$$y(x) = ce^{-x^3} + 2.$$

Esercizio 2. Si risolva l'equazione differenziale

$$y' + \frac{y}{x} = e^x.$$

Svolgimento.
È un'equazione lineare completa del primo ordine. Dobbiamo dunque prima risolvere l'equazione omogenea associata e poi trovare una soluzione particolare.
L'equazione omogenea associata è $y' = -\frac{y}{x}$ che ha per soluzione $y_h(x) = kx^{-1}$ (è sufficiente scrivere $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ e integrare a membro a membro).
Cerchiamo una soluzione particolare utilizzando il metodo della variazione della costante. Cerchiamo cioè una soluzione del tipo $c(x)x^{-1}$ dove $c(x)$ è una funzione incognita.
Si ha $y' = c'x^{-1} - cx^{-2}$ e sostituendo nell'equazione si ottiene

$$c'x^{-1} - cx^{-2} + cx^{-2} = e^x$$

cioè $c' = xe^x$ e integrando $c(x) = e^x(x - 1)$.
Una soluzione particolare sarà allora $y_p(x) = e^x(1 - \frac{1}{x})$.
Le soluzioni dell'equazione assegnata sono allora tutte e sole le funzioni del tipo

$$y(x) = kx^{-1} + e^x(1 - \frac{1}{x})$$

con $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - xy^{1/3} \\ y(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases} .$$

Svolgimento.

È un'equazione di Bernoulli, riconducibile ad un'equazione lineare mediante sostituzione. Si osservi che la funzione $y(x) = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale ma non del problema di Cauchy. Dividiamo l'equazione per $y^{\frac{1}{3}}$ e osserviamo che $\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2}u'$ dove abbiamo posto $u(x) = (y(x))^{\frac{2}{3}}$. Possiamo dunque riscrivere l'equazione nella forma seguente:

$$\frac{3}{2}u' - u = -x.$$

Questa è un equazione lineare completa. L'equazione omogenea associata $3u' - 2u = 0$ ha come soluzioni le funzioni $ke^{\frac{2}{3}x}$ con $k \in \mathbb{R}$.

Si calcola facilmente una soluzione particolare dell'equazione completa. Possiamo cercarla tra le funzioni $ax + b$. Deve essere $\frac{3}{2}a - (ax + b) = -x$ e quindi $a = 1$, $b = \frac{3}{2}$.

La generica soluzione dell'equazione $\frac{3}{2}u' - u = -x$ è pertanto $u(x) = ke^{\frac{2}{3}x} + x + \frac{3}{2}$.

Sarà allora

$$y(x) = \left(ke^{\frac{2}{3}x} + x + \frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

ed imponendo la condizione $y(1) = \frac{\pi}{4}$ si ottiene $k = \left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{2}\right] e^{-\frac{2}{3}}$. Si ottiene allora

$$y(x) = \left(\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{2}\right] e^{\frac{2}{3}(x-1)} + x + \frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Esercizio 4. Si consideri un corpo in caduta libera immerso in un fluido (si pensi ad esempio ad un paracadutista durante un lancio). Si studino le leggi del moto.

La seconda legge di Newton stabilisce che $F = m\,a$. Nel nostro esempio la forza ha due componenti: la forza di gravità, $m\,g$, che agisce dall'alto verso il basso, e la forza di attrito f_{attr}, che agisce in senso inverso ed è funzione della velocità del corpo.

L'equazione del corpo in caduta si può allora scrivere come segue:

$$mx'' = mg - f_{\text{attr}}(x').$$

L'equazione è solo apparentemente di secondo grado. Infatti si può pensare di risolverla rispetto alla velocità $v = x'$. L'equazione diventa allora

$$mv' = mg - f_{\text{attr}}(v).$$

Si studi l'equazione proposta nei casi

a) $f_{\text{attr}}(x') = kx'$ (buona approssimazione ad esempio per un corpo non troppo veloce in caduta nell'acqua);

b) $f_{\text{attr}}(x') = k(x')^2$ (buona approssimazione ad esempio per il paracadutista in caduta libera).

Svolgimento.

a) L'equazione che stiamo studiando è

$$v' = g - \frac{k}{m}v, \qquad\qquad v' = -\frac{k}{m}(v - \frac{gm}{k}),$$

e, integrando,

$$\log|v - \frac{gm}{k}| = -\frac{k}{m}t + c,$$

$$v = \frac{gm}{k} + Ae^{-\frac{k}{m}t}$$

dove si è posto $A = e^c$.

Imponendo la condizione iniziale $v(0) = 0$ (la velocità del corpo in caduta libera è nulla al momento iniziale) si ottiene $A = -\frac{gm}{k}$ e quindi si ottiene

$$v = \frac{gm}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t}).$$

Si noti che la velocità, come l'intuizione ci suggerisce, è decrescente e tende al valore asintotico $\frac{mg}{k}$. Questo valore rappresenta la velocità terminale del corpo. Tale velocità si può anche ottenere imponendo $v' = 0$ e risolvendo rispetto a v l'equazione $v' = g - \frac{k}{m}v$.

b) L'equazione che stiamo studiando è

$$v' = g - \frac{k}{m}v^2, \qquad v' = -\frac{k}{m}(v^2 - \frac{gm}{k}),$$

$$\frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m}dt \qquad \frac{dv}{(v + \sqrt{\frac{mg}{k}})(v - \sqrt{\frac{mg}{k}})} = -\frac{k}{m}dt,$$

e, integrando,

$$\sqrt{\frac{k}{4mg}}\log\left|\frac{v - \sqrt{\frac{gm}{k}}}{v + \sqrt{\frac{gm}{k}}}\right| = -\frac{k}{m}t + c,$$

$$\left|\frac{v - \sqrt{\frac{gm}{k}}}{v + \sqrt{\frac{gm}{k}}}\right| = Ae^{\sqrt{\frac{4mg}{k}}(-\frac{k}{m}t)} = Ae^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t},$$

dove si è posto $A = e^{c\sqrt{\frac{4mg}{k}}}$.

Si osservi che $v < \sqrt{\frac{mg}{k}}$ (perché la condizione iniziale è $v(0) = 0$). Risolvendo l'equazione rispetto a v si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{1 - Ae^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1 + Ae^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}.$$

Imponendo la condizione iniziale $v(0) = 0$ si ottiene $\frac{1-A}{1+A} = 0$ da cui $A = 1$.

Si ottiene infine

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{1 - e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}{1 + e^{-2\sqrt{\frac{gk}{m}}t}}.$$

Anche in questo caso la velocità è decrescente e tende al valore asintotico $\sqrt{\frac{mg}{k}}$. Questo valore rappresenta la velocità terminale del corpo. Come nel caso precedente tale velocità si può ottenere imponendo $v' = 0$ e risolvendo rispetto a v l'equazione $v' = g - \frac{k}{m}v^2$.

Più in generale si potrebbe studiare il problema in cui $f_{\text{attr}}(x') = k(x')^\gamma$. L'integrazione nel caso generale risulta però alquanto complessa ed è talvolta preferibile, se non necessario, un approccio numerico. Anche senza risolvere l'equazione esplicitamente si può comunque studiare l'andamento della soluzione. In particolare si otterrà anche nel caso generale la velocità terminale pari a $v = \left(\frac{mg}{k}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

Esercizio 5. Si integri l'equazione differenziale del secondo ordine

$$y''y^3 + 1 = 0.$$

Svolgimento.

Questa equazione è del secondo ordine, ma è del tipo $y'' = f(y)$ e quindi si può ricondurre ad un'equazione del primo ordine.

Moltiplichiamo i due membri dell'equazione per $2y'$:

$$2y' \cdot y'' = 2y' \cdot (-y^{-3}); \qquad \frac{d}{dx}(y')^2 = -2y' \cdot y^{-3}.$$

Integrando i due membri in dx si ottiene un'equazione del primo ordine, dipendente da un parametro reale c:

$$(y')^2 = y^{-2} + c.$$

Studiando l'equazione a variabili separate

$$y' = \pm\sqrt{y^{-2} + c} \qquad \text{cioè} \qquad \frac{y'}{\sqrt{y^{-2} + c}} = \pm 1;$$

si ottiene

$$\frac{\sqrt{1 + cy^2}}{c} = \pm x + d \qquad \text{da cui} \qquad y(x) = \pm\sqrt{\frac{(\pm cx + cd)^2 - 1}{c}}.$$