Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercitazioni per la preparazione della prova scritta di Matematica 3
Dott. Franco Obersnel

Lezione 1: struttura di $\mathbb{R}^n$*, prodotto scalare, distanza e topologia.*

Esercizio 1. Sia H uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ricorda la disuguaglianza di Cauchy-Buniakovski-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

per ogni $x, y \in H$.

Si verifichi che vale l'uguaglianza

$$|\langle x, y\rangle| = ||x|| \cdot ||y||$$

se e soltanto se i due vettori x e y sono linearmente dipendenti, cioè se esiste una costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $x = \lambda y$.

Svolgimento.

Sia $x = \lambda y$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle \lambda y, y\rangle| = |\lambda||\langle y, y\rangle| = |\lambda|\, ||y||^2 = ||\lambda y|| \cdot ||y|| = ||x|| \cdot ||y||.$$

Supponiamo ora che per due vettori x e y valga l'uguaglianza $|\langle x, y\rangle| = ||x|| \cdot ||y||$. Si ha per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq ||x + ty||^2 = \langle x + ty, x + ty\rangle = ||x||^2 + t^2||y||^2 + 2t\langle x, y\rangle.$$

Il discriminante dell'equazione quadratica in t, $||x||^2 + t^2||y||^2 + 2t\langle x, y\rangle$, è $\triangle = 4\left(\langle x, y\rangle^2 - ||x||^2||y||^2\right)$, ed è nullo per ipotesi. Di conseguenza l'equazione quadratica ammette un'unica soluzione che possiamo indicare con $-\lambda$ di molteplicità 2. Si avrà perciò $||x - \lambda y||^2 = 0$ e, per la non-degeneratezza della norma, $x - \lambda y = 0$, cioè $x = \lambda y$.

Esercizio 2. Si provi che in uno spazio vettoriale H in cui è definito un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vale la seguente identità del parallelogramma:

$$\text{per ogni } x \text{ e } y \in H \text{ si ha } ||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

Svolgimento.

Si calcola facilmente $||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle$ e $||x - y||^2 = \langle x - y, x - y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\langle x, y\rangle$.

Sommando a membro a membro le due espressioni si ottiene la tesi.

A questo proposito ricordiamo un interessante risultato di Jordan e von Neumann: in uno spazio normato X (cioè in uno spazio sul quale è definita una norma $||\cdot||$) si può definire un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ compatibile con la norma (cioè tale che $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ se e solo se in X vale l'identità del parallelogramma.

Esercizio 3. Sia H uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si ricorda che due vettori x e y si dicono ortogonali se e solo se $\langle x, y\rangle = 0$. Si verifichi che in H, per ogni coppia di vettori x e y mutualmente ortogonali vale la seguente uguaglianza (teorema di Pitagora !):

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Svolgimento. Si ha

$$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x, y\rangle = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Esercizio 4. Si provi che una sfera-aperta di $\mathbb{R}^n$ è un insieme aperto.

Svolgimento.
Sia $B = B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0|| < \rho\}$. Si deve provare che ogni punto $x \in B$ è interno a B, cioè che per ogni punto $x \in B$ esiste una pallina di centro x e raggio opportuno ε, $B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x|| < \varepsilon\}$, tale che $B(x, \varepsilon) \subseteq B$.

Per ipotesi $||x - x_0|| < \rho$, perciò il numero $\rho - ||x - x_0||$ è positivo. Si può allora prendere $\varepsilon = \rho - ||x - x_0||$.

Verifichiamo che $B(x, \varepsilon) \subseteq B$. Sia $y \in B(x, \varepsilon)$, allora $||y - x|| < \varepsilon = \rho - ||x - x_0||$. Perciò $||y - x_0|| = ||y - x + x - x_0|| \leq ||y - x|| + ||x - x_0|| < \rho - ||x - x_0|| + ||x - x_0|| = \rho$. Questo prova che $||y - x_0|| < \rho$, cioè $y \in B$.

Esercizio 5. Sia D l'insieme dei punti $(x, y)^T$ di $\mathbb{R}^2$ per i quali ha senso considerare l'espressione

$$\log x + \log(\sin y).$$

(Cioè D è il dominio della funzione in due variabili $f(x, y) = \log x + \log(\sin y)$.)

Si descriva geometricamente l'insieme D, si dica se è aperto, chiuso, compatto, connesso per archi.

Svolgimento.
Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo si deve avere $x > 0$ e inoltre $\sin y > 0$. La disequazione $\sin y > 0$ ha per soluzione i numeri $y \in]0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$ con $k \in \mathbb{Z}$. L'insieme considerato è pertanto l'insieme

$$D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ \exists k \in \mathbb{Z}\ y \in]2k\pi, \pi + 2k\pi[\}.$$

L'insieme D è un unione infinita (numerabile) di strisce aperte $]0, +\infty[\times]2k\pi, \pi + 2k\pi[$. D è pertanto un insieme aperto, non chiuso, non compatto e non connesso.

Esercizio 6. Sia D l'insieme dei punti $(x, y)^T$ del piano per i quali ha senso considerare l'espressione

$$\frac{\sqrt{2(x + y) - (x^2 + y^2) - 1}}{|x - y|}.$$

(Cioè D è il dominio della funzione in due variabili $f(x, y) = \frac{\sqrt{2(x+y)-(x^2+y^2)-1}}{|x-y|}$.)

Si descriva geometricamente l'insieme D, si dica se è aperto, chiuso, limitato, compatto, connesso per archi. Si trovi l'interno, la chiusura, la frontiera di D.

Svolgimento.
L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo. Pertanto si deve avere

$$2(x + y) - (x^2 + y^2) - 1 \geq 0;$$

$$2x + 2y - x^2 - y^2 - 1 \geq 0;$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \leq 1,$$

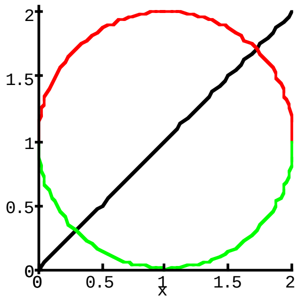
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1.$$

Questo significa che i punti dell'insieme devono appartenere al disco di centro $(1, 1)^T$ e raggio unitario. Inoltre il denominatore della frazione non può essere nullo, pertanto richiediamo $x \neq y$.

L'insieme D è dunque

$$D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1;\ x \neq y\}.$$

L'insieme D è l'insieme dei punti che appartengono al disco chiuso di centro $(1,1)^T$ e raggio unitario e non appartengono alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



L'insieme D non è chiuso (ad esempio il punto $(1,1)^T$ non appartiene a D ma è un suo punto di accumulazione. L'insieme D non è neppure aperto perché ad esempio tutti i punti $(x,y)^T$ appartenenti alla circonferenza di equazione $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ sono punti di frontiera e appartengono all'insieme se $x \neq y$. L'insieme D è limitato (ad esempio è contenuto nella sfera di centro l'origine e raggio 10) ma non è compatto in quanto non è chiuso. L'insieme D non è neppure connesso (nessun arco può congiungere un punto che si trova sotto la bisettrice con un punto che si trova sopra la bisettrice senza attraversarla). L'interno di D è dato dalla sfera-aperta di centro $(1,1)^T$ e raggio unitario al quale togliamo tutti i punti che appartengono alla retta $x=y$. La chiusura di D è la sfera-chiusa di centro $(1,1)^T$ e raggio unitario. La frontiera di D è la circonferenza $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ unita al segmento di bisettrice $\{(x,x)^T\colon 1-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

Esercizio 7. Sia D l'insieme dei punti $(x,y,z)^T$ del piano per i quali ha senso considerare l'espressione

$$\frac{x^2}{\log(x-y+z)}$$

(Cioè D è il dominio della funzione in tre variabili $f(x,y,z)=\frac{x^2}{\log(x-y+z)}$.)

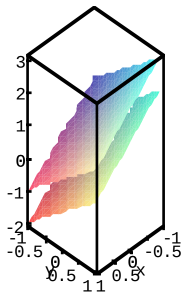
Si descriva geometricamente l'insieme D. Si dica se D è aperto, chiuso, compatto, connesso e si trovino la chiusura e l'interno di D.

Svolgimento.

La funzione logaritmo è definita solo per numeri positivi, dunque deve essere $x-y+z>0$. L'equazione $x-y+z=0$ rappresenta un piano che passa per l'origine di $\mathbb{R}^3$. Tutti i punti del dominio devono dunque trovarsi sopra a tale piano. Il denominatore della frazione, inoltre, non può essere nullo. Dunque si deve imporre $\log(x-y+z) \neq 0$ cioè $x-y+z \neq 1$. Questa è l'equazione di un piano parallelo al precedente. L'insieme cercato sarà pertanto

$$D=\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3\colon x-y+z>0\ ;\ x-y+z \neq 1\}$$

ed è la porzione di spazio che si trova sopra al piano di equazione $x-y+z=0$ al quale dobbiamo togliere i punti del piano di equazione $x-y+z=1$.



Il semispazio $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - y + z > 0\}$ è evidentemente aperto. Se a questo insieme togliamo un piano (che è un insieme chiuso) otteniamo ancora un insieme aperto. Pertanto D è aperto.

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono l'insieme vuoto e l'insieme $\mathbb{R}^3$; D pertanto non è chiuso.

L'insieme D non è compatto in quanto è illimitato. Infatti, ad esempio, la semiretta $\{(0,0,z)^T : z > 1\}$ è contenuta in D.

L'insieme D non è connesso per archi. Infatti si prenda un qualsiasi punto appartenente a D tale che $0 < x - y + z < 1$ e un secondo punto tale che $x - y + z > 1$. Qualunque arco congiungente i due punti deve intersecare il piano di equazione $x - y + z = 1$ e pertanto non può essere contenuto in D. Questo fatto, alquanto intuitivo, si può dimostrare rigorosamente utilizzando la versione per funzioni in più variabili del teorema di esistenza degli zeri, che verrà trattato nella terza lezione.

Essendo D un insieme aperto l'interno di D coincide con D. La chiusura di D è invece il semispazio $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - y + z \geq 0\}$.

Esercizio 8. Si consideri l'insieme

$$E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : xy + yz + xz = 1; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

Si stabilisca se E è chiuso, aperto, compatto, connesso per archi.

Svolgimento.

Si può osservare che l'insieme E è l'insieme di livello 1 della funzione continua $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ e in quanto tale è un insieme chiuso. (Questo perché la controimmagine in una funzione continua di un insieme chiuso è ancora un insieme chiuso).

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono l'insieme vuoto e l'insieme $\mathbb{R}^3$; E pertanto non è aperto.

Consideriamo il sottoinsieme di E contenuto nel piano $z = 0$; questo insieme è $\{(x,y,0)^T \in \mathbb{R}^3 : xy = 1\}$ ed è quindi un ramo di iperbole equilatera, pertanto è illimitato e quindi anche E, contenendo un sottoinsieme illimitato, è illimitato e non può essere compatto.

Per provare che E è connesso si può ricordare che il grafico di una funzione reale continua definita su un insieme connesso per archi è un insieme connesso per archi.

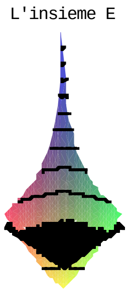
(Infatti sia A un insieme connesso per archi e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $\Gamma = \{(x, f(x))^T : x \in A\}$ il grafico della funzione f. Siano $(x_1, f(x_1))^T$ e $(x_2, f(x_2))^T$ due punti di Γ. Vogliamo provare che esiste un arco congiungente i due punti. Poiché A è connesso per archi e $x_1, x_2 \in A$ esiste un arco $\pi : [a,b] \to A$ tale che $\pi(a) = x_1$ e $\pi(b) = x_2$. La funzione $\phi : [a,b] \to \Gamma$ definita da $\phi(t) = (\pi(t), f(\pi(t)))^T$ è continua essendo composta di funzioni continue, e si ha $\phi(a) = (x_1, f(x_1))^T$ e $\phi(b) = (x_2, f(x_2))^T$. Dunque ϕ è una arco che congiunge $(x_1, f(x_1))^T$ con $(x_2, f(x_2))^T$. Questo prova che Γ è connesso per archi.)

Osserviamo ora che E è il grafico di una funzione continua f definita su un insieme connesso per archi. Si osservi che se $(x,y,z)^T \in E$ le coordinate x e y non possono essere contemporaneamente nulle, infatti se $x = y = 0$ si ottiene $xy + xz + yz = 0 \neq 1$. Dunque $x + y \neq 0$. Si può allora scrivere

$$xy + xz + yz = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z(x+y) = 1 - xy \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1 - xy}{x + y}.$$

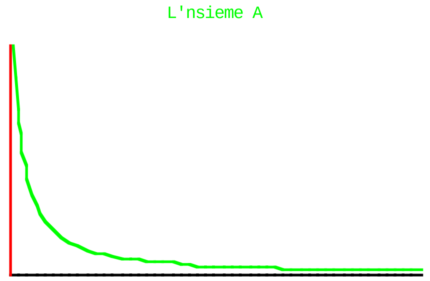
L'insieme E è pertanto il grafico della funzione $g : A \to \mathbb{R}$ dove $g(x,y) = \dfrac{1 - xy}{x + y}$ e

$$A = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{1 - xy}{x + y} \geq 0\}.$$



Si osservi che essendo $x+y>0$ la condizione $\dfrac{1-xy}{x+y} \geq 0$ è equivalente alla condizione $1-xy \geq 0$ cioè $x=0$ opppure $y \leq \frac{1}{x}$. Si può pertanto scrivere

$$A = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x=0, y>0\} \cup \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \colon x>0,\ y \leq \frac{1}{x}\}.$$



L'insieme A è la regione del piano compresa tra il semiasse positivo delle x e il ramo di iperbole $y=\frac{1}{x}$, unito al semiasse positivo delle y, e, pertanto, è connesso per archi.