

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

31 maggio 2001

Esempio di esame

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{x - 2y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \frac{2x - 2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \right)^T.$$

Si calcoli il lavoro fatto dal campo per muovere una particella lungo il cerchio completo $x^2 + y^2 = 1$.

Esercizio 2 Si trovino tre numeri positivi x, y, z la cui somma è 100 e tali che

$$x^a y^b z^c$$

è massimo.

Esercizio 3 Si provi che ogni campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ della forma

$$F(x, y, z) = (f(x), g(y), h(z))^T,$$

dove $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni di classe $C^1(\mathbb{R})$, è conservativo. Si calcoli un potenziale di F .

Esercizio 4 Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 9y'' + y - 3x = e^{-x}; \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 5 Si provi che la somma delle intercette x, y, z di ogni piano tangente la superficie di equazione

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = k$$

è costante.

Soluzioni:

1: $2\sqrt{2}\pi$.

2: $x = 100\frac{a}{a+b+c}, \quad y = 100\frac{b}{a+b+c}, \quad 100\frac{c}{a+b+c}$.

3: $U(x, y, z) = \int f(x) dx + \int g(y) dy + \int h(z) dz$.

4: $y(x) = \frac{9}{10} \cos \frac{1}{3}x - \frac{27}{10} \sin \frac{1}{3}x + 3x + \frac{1}{10}e^{-x}$.

5: il piano tangente in (x_0, y_0, z_0) ha equazione $\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$; le intercette sono $x = \sqrt{x_0}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{x_0}k$; $y = \sqrt{y_0}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{y_0}k$; $z = \sqrt{z_0}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{z_0}k$; la loro somma è k^2 .