

**Esercizi di ANALISI MATEMATICA I**  
**Dott. Franco Obersnel**

Anno accademico 2002–2003. Trieste, 15 novembre 2002

**ESERCIZIO N. 1.**

Si calcolino derivate delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= \log(\sin(\sqrt{x})); & \text{b)} \quad f(x) &= \sqrt{\sin(\log x)}; & \text{c)} \quad f(x) &= \arcsen(\sqrt{x} - 1); \\ \text{d)} \quad f(x) &= \frac{x^2 e^x}{x-1}; & \text{e)} \quad f(x) &= \frac{x^{\frac{2}{3}} - 4}{x^{\frac{1}{3}} - 2}; & \text{f)} \quad f(x) &= (\log(x^n))^n. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO N. 2.**

Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad f(x) &= \cos^2(x) \cdot \log_2(x^2); & \text{b)} \quad f(x) &= \frac{\sin(x^x)}{x}; \\ \text{c)} \quad f(x) &= \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2x}}; & \text{d)} \quad f(x) &= \left(\log\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\right)^{\frac{1}{x}}; \\ \text{e)} \quad f(x) &= \frac{2^x - 3^x}{x}; & \text{f)} \quad f(x) &= \log_{\sin x} \cos^2 x. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO N. 3.**

a) Si determinino le costanti  $a$  e  $b$  in modo tale che la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0; \\ a(x-1)^2 + b & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sia derivabile in 0.

b) Si provi che ogni funzione  $u(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ , con  $A \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , è soluzione dell’equazione differenziale

$$u'' + \omega^2 u = 0.$$

c) Si calcoli la derivata  $n$ -esima di un polinomio di grado  $n$ .

d) Si calcoli la derivata  $n$ -esima della funzione  $x e^x$ .

**SOLUZIONI**

Es. 1:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}, & \text{b)} \quad & \frac{\cos(\log x)}{2x \sqrt{\sin(\log x)}}, & \text{c)} \quad & \frac{1}{2\sqrt{x} \sqrt{2\sqrt{x} - x}}, \\ \text{d)} \quad & \frac{x e^x (x^2 - 2)}{(x-1)^2}, & \text{e)} \quad & \frac{1 - 4x^{-\frac{1}{3}} + 4x^{-\frac{2}{3}}}{3(x^{\frac{1}{3}} - 2)^2}, & \text{f)} \quad & \frac{n^{n+1} (\log x)^{n-1}}{x}. \end{aligned}$$

Es. 2:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 2 \cos x \left( \frac{\cos x}{x \log 2} - 2 \sin x \cdot \log_2 x \right); & \text{b)} \quad & \frac{x^{x+1} \cos(x^x) (\log x + 1) - \sin(x^x)}{x^2}; \\ \text{c)} \quad & \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2x}} \frac{x - (2+x) \log(1 + \frac{x}{2})}{2x^2(2+x)}; & \text{d)} \quad & \left(\log\left(\frac{x^2}{x+1}\right)\right)^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x-2}{x^3(x+1) \log(\frac{x^2}{x+1})} - \frac{\log(\log(\frac{x^2}{x+1}))}{x} \right); \\ \text{e)} \quad & \frac{2^x \log 2 - 3^x \log 3}{x} - \frac{2^x - 3^x}{x^2}; & \text{f)} \quad & - \frac{\log(\cos x) + \text{tg}^2(x) \cdot \log(\sin x)}{\text{tg}(x) \cdot (\log(\sin x))^2}. \end{aligned}$$

Es. 3:

- a)  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{2}$ .
- c)  $n! a_n$  se  $a_n$  è il coefficiente del termine di grado  $n$  del polinomio.
- d)  $(n+x)e^x$ .