Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: numeri complessi II

Franco Obersnel

(i è l'unità immaginaria, $|z|, \bar{z}, \Re e\, z$ e $\Im m\, z$ indicano rispettivamente il modulo, il coniugato, la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z, per cui $z = \Re e\, z + i\,\Im m\, z$, $\bar{z} = \Re e\, z - i\,\Im m\, z$, $|z| = \sqrt{(\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2}$)

Esercizio 1 Si determinino e si rappresentino nel piano di Gauss i seguenti insiemi E di numeri complessi. Si stabiliscano inoltre le principali proprietà topologiche di E, in particolare se E è aperto, chiuso, limitato, compatto, si calcolino la chiusura di E, l'insieme dei punti interni, i punti di accumulazione, i punti isolati, i punti di frontiera.

a) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < \left|\frac{z}{z-i}\right| < 2\}$

b) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im m\left(\frac{z}{i\,\bar{z}}\right) \geq 0\}$

c) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 1\} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \Re e z = \Im m z \in \mathbb{Q}\}$

d) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z-\bar{z}}{i} \in \mathbb{Q},\ |z| < 1\}$

e) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |iz+1| > \ |2\bar{z}+i|\}$

f) $E = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + \bar{z}^2 \in \mathbb{N}\}$

Esercizio 2 a) Si calcoli il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(2-i)^{n-1}}{3^n}.$$

b) Si calcoli il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - \cos(\frac{1}{n})(1 - \frac{i}{n})\right).$$

Esercizio 3 Sia $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z \neq 1$. Si provi che la successione $(z^n)_n$ non è convergente in $\mathbb{C}$. (Sugg. Se convergesse ad un numero w dovremmo avere $(z^{n+1} - z^n) \to 0$.)

Esercizio 4 Sia $t \in \mathbb{R}$, $t \neq k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si provi che le successioni reali $\Big(\text{sen}\,(nt)\Big)_n$ e $\Big(\cos(nt)\Big)_n$ non convergono in $\mathbb{R}$.
(Sugg. Si verifichi che $\cos(nt) = \big(\text{sen}\,(t)\big)^{-1}\big(\text{sen}\,((n+1)t) - \text{sen}\,(nt)\cos t\big)$ e
$\text{sen}\,(nt) = -\big(\text{sen}\,(t)\big)^{-1}\big(\cos((n+1)t) - \cos(nt)\cos t\big)$. Si usi poi il risultato dell'esercizio 3.)

Esercizio 5 (Nucleo di Dirichlet) Sia $t \in \mathbb{R}$, $t \neq k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Si provi che

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \cos(\frac{n}{2}t)\frac{\text{sen}\,(\frac{n+1}{2}t)}{\text{sen}\,\frac{t}{2}} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{n} \text{sen}\,(kt) = \text{sen}\,(\frac{n}{2}t)\frac{\text{sen}\,(\frac{n+1}{2}t)}{\text{sen}\,\frac{t}{2}}.$$

Soluzioni: (Qui $z = x + iy = \rho\, e^{i\vartheta}$.)

1. a) Parte di piano superiore alla retta $y = \frac{1}{2}$ e esterna al cerchio di equazione $x^2 + (y - \frac{4}{3})^2 = \frac{4}{9}$. Insieme aperto, illimitato; la frontiera è l'unione della circonferenza e della retta. b) Parte di piano con $|y| \geq |x|$ esclusa l'origine; è un insieme non chiuso e non aperto, illimitato; la chiusura è la parte di piano con $|y| \geq |x|$, la frontiera è l'unione delle due bisettrici dei quadranti, i punti interni sono i punti della parte di piano con $|y| < |x|$. c) Il cerchio chiuso di centro $(1, 0)$ e raggio 1 a cui togliamo i punti della bisettrice del primo e terzo quadrante di ascissa e ordinata razionale. Insieme né aperto né chiuso, limitato; la chiusura è data dal cerchio, i punti di frontiera sono l'unione della circonferenza e del segmento di retta contenuto nel cerchio. d) Punti del cerchio unitario di centro l'origine che hanno ordinata razionale. Insieme né aperto né chiuso, limitato; la chiusura è data dal cerchio, i punti di frontiera sono il cerchio. e) $E = B(\frac{i}{3}, \frac{1}{3})$. f) È la famiglia di iperboli equilatere $x^2 - y^2 = \frac{n}{2}$, con $n \in \mathbb{N}$ (in particolare, per $n = 0$, le bisettrici). È un insieme chiuso illimitato, privo di punti interni.

2. a) 0. b) $1 + i$.

3. dovremmo avere $(z^{n+1} - z^n) \to 0$, ma $|z^{n+1} - z^n| = |e^{i\vartheta} - 1| > 0$ e indipendente da n.

4. Si osserva che se $\Big(\text{sen}\,(nt)\Big)_n$ è convergente, anche $\Big(\cos(nt)\Big)_n$ lo è, contraddicendo quanto provato in 3..

5. Si applichi la nota formula $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ a $z = e^{it}$ e si ricordi la relazione trigonometrica $1 - \cos(\alpha) = 2\text{sen}\,^2(\frac{\alpha}{2})$.