Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: funzioni analitiche

Prof. Franco Obersnel

(i è l'unità immaginaria, $|z|, \bar{z}, \Re e\, z$ e $\Im m\, z$ indicano rispettivamente il modulo, il coniugato, la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z, per cui $z = \Re e\, z + i\, \Im m\, z$, $\bar{z} = \Re e\, z - i\, \Im m\, z$, $|z| = \sqrt{(\Re e\, z)^2 + (\Im m\, z)^2}$)

Esercizio 1 Sia $f : A \to \mathbb{C}$ un funzione analitica definita sull'aperto connesso $A \subseteq \mathbb{C}$. Supponiamo che esista il limite uniforme $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n)}(z) = g(z)$. Si verifichi che allora si ha necessariamente $g(z) = c\, e^z$ con $c \in \mathbb{C}$ costante. (Sugg. si osservi che $\lim\limits_{n\to+\infty} (f')^{(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n+1)} = g$.)

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera. Supponiamo che esistano costanti $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, e $k \in \mathbb{N}$ tali che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, se $|z| \geq K$, si ha $|f(z)| \leq |z|^k$. Si provi che allora f è un polinomio di grado $\leq k$. (Sugg. posto $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ si applichi il teorema di Liouville alla funzione $\frac{1}{z^k} \sum\limits_{n=k}^{+\infty} a_n z^n$.)

Esercizio 3 Sia f una funzione olomorfa in $B(0,1)$. Supponiamo che, per ogni $z \in B(0,1)$, $|f(z)| \leq 1 - |z|$. Si provi che allora $f = 0$.

(Sugg. Si usi la formula integrale di Cauchy su un cerchio di raggio r e il fatto che $\left|\frac{f(\xi)}{\xi - z}\right| \leq \frac{1-r}{r-|z|}$ e quindi $|f(z)| \leq \frac{1-r}{r-|z|} r$.)

Esercizio 4 (Disuguaglianze di Cauchy) Sia f una funzione analitica sul disco $B(z_0, r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

e si ponga $M = \max\{|f(z)| : z \in C(z_0, r)\}$ (dove $C(z_0, r) = \partial B(z_0, r)$ è la circonferenza di centro z_0 e raggio r). Si provi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

(Sugg. Si usino le formule di Cauchy per le derivate e le formule di Taylor per i coefficienti a_n.)

Esercizio 5 Si usino i prolungamenti analitici per provare l'uguaglianza $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\, e^{z_2}$, per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Soluzioni:

1. Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} (f')^{(n)} = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n+1)} = g$, si ha $g' = g$. Pertanto $\frac{d}{dz}\big(e^{-z} g(z)\big) = e^{-z}\big(g'(z) - g(z)\big) = 0$ e quindi $e^{-z} g(z)$ è costante.

2. Sia $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e si ponga $p(z) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i z^i$. Si consideri la funzione $g(z) = \frac{f(z)-p(z)}{z^k}$. Si ha, per $|z| \geq K$, $|g(z)| \leq \frac{|f(z)|}{|z|^k} + \frac{|p(z)|}{|z|^k} \leq 1 + \frac{|a_0|}{|z|^k} + \frac{|a_1|}{|z|^{k-1}} + \cdots + \frac{|a_{k-1}|}{|z|}$. Perciò g è limitata e quindi, essendo anche analitica, per il Teorema di Liouville, è costante. Poiché $f(z) = p(z) + z^k g(z)$ si conclude.

3. Sia $0 < r < 1$ e $\gamma_r(t) = re^{it}$. Per la formula integrale di Cauchy si ha $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$. Usando l'ipotesi e il fatto che $|re^{it} - z| \geq r - |z|$ si ottiene $\left|\frac{f(\xi)}{\xi - z}\right| \leq \frac{1-r}{r-|z|}$ e quindi $|f(z)| \leq \frac{1-r}{r-|z|} r$. Prendendo il limite per $r \to 1$ si conclude.

4. Dalle formule integrali di Cauchy si ha $f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$, da cui $|a_n| = \left|\frac{f^{(n)}(z_o)}{n!}\right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r$.

5. Per ogni $x_2 \in \mathbb{R}$ le funzioni $g_1(z) = e^{z+x_2}$ e $g_2(z) = e^z e^{x_2}$, sono uguali sull'asse reale, quindi i loro prolungamenti analitici sono uguali su $\mathbb{C}$. Fissiamo ora $z_1 \in \mathbb{C}$ e consideriamo le funzioni $h_1(z) = e^{z_1+z}$ e $h_2(z) = e^{z_1} e^z$. Poiché h_1 e h_2 sono uguali sull'asse reale i loro prolungamenti analitici sono uguali su $\mathbb{C}$ e si conclude.