

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 26

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si studino i punti critici della funzione

$$f(x, y) = xy^2 e^{x-y}$$

sull'insieme $E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$.

Esercizio 2 Si trovino i punti di massimo/minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^3 y^3 + x^2 + y^2 - 2xy$ ristretta all'insieme

$$\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 3 Si consideri il campo vettoriale

$$g(x, y) = \left(\frac{x - 2y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \frac{2x - 2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \right)^T.$$

Si calcoli il lavoro compiuto dal campo su una particella di massa unitaria che percorre in verso antiorario il cerchio completo $x^2 + y^2 = 1$.

Esercizio 4 Si calcoli l'area della porzione di piano $2x + 5y + z = 10$ che sta dentro il cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 9$.

Esercizio 5 Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x}(\sqrt{x^2 - y^2} + y); \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6 Si provi che la somma delle intercette x, y, z di ogni piano tangente la superficie di equazione

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = k$$

è costante. (Le intercette di un piano non parallelo ad alcun piano coordinato sono i numeri $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ dove $(\hat{x}, 0, 0)^T, (0, \hat{y}, 0)^T, (0, 0, \hat{z})^T$ sono le intersezioni del piano con gli assi coordinati).

Esercizio 7 Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_{\gamma} \sqrt[4]{x^2 + y^2} ds$ dove γ è la cardioide di equazione polare $\rho = 1 + \cos \vartheta, \vartheta \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 8 Si provi che ogni campo vettoriale $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ della forma

$$g(x, y, z) = (f(x), g(y), h(z))^T,$$

dove $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni di classe $C^1(\mathbb{R})$, è conservativo. Si calcoli un potenziale di g .

Esercizio 9 Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 9y'' + y - 3x = e^{-x}; \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 2. \end{cases}$$