Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 25

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si consideri la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,3^n}\, x^{2n}$.

a) Si calcoli il raggio di convergenza della serie. b) Si calcoli la somma della serie. c) Si trovi un valore approssimato per la somma della serie con $x = 1$, con un errore inferiore a $\frac{1}{100}$.

Esercizio 2 Si determini il dominio D della funzione

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-\frac{1}{4})^n \frac{\|(x,2y)^T\|^n}{n}.$$

Si stabilisca inoltre se D è un insieme aperto, chiuso, limitato, compatto, connesso.

Esercizio 3 Si calcoli l'integrale generalizzato $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^5}}\, dxdy$; dove $D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$.

Esercizio 4 Si calcoli l'integrale $\displaystyle\iiint_E z\, dm$ dove E è la parte di spazio racchiusa dalla porzione di cono $z^2 = \dfrac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = h$ $(a > 0,\ h > 0)$.

Esercizio 5 Si consideri l'equazione della corda vibrante $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; si provi che ogni funzione $f(x,y) = \varphi(x - ay) + \psi(x + ay)$, dove φ e ψ sono funzioni di classe C^2, è soluzione dell'equazione proposta.

Esercizio 6 Si studino i punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$$

ristretta all'insieme $A =]0,\pi[\times]0,\pi[\times]0,\pi[$.

Esercizio 7 Si calcoli l'integrale

$$\iint_D \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\, dxdy;$$

dove $D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi^2}{9} \le x^2+y^2 \le \pi^2\}$.

Esercizio 8 Si calcoli l'integrale

$$\iiint_E x^3y^2z\, dm$$

dove E è l'insieme

$$E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : |x - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{2},\ |y - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{2},\ 0 \le z \le \sqrt{\frac{x}{x+1}}\}.$$

Esercizio 9 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = x\log(x^2+y^2+1).$$

Si scriva l'espressione dell'approssimante quadratico di f nel punto $(1,0)^T$. Si calcoli la derivata parziale di f nel punto $(1,0)^T$ lungo la direzione del versore $(a,b)^T$.

Soluzioni 1. a) $\rho = \sqrt{3}$. b) $-\log(1+\frac{x^2}{3}$. c) Usando il criterio di Leibniz: $|s_n - s| < a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\,3^{n+1}} < \frac{1}{100}$; si può prendere $n = 3$, $\tilde{s} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{18} - \frac{1}{81}$. 2. Affinché il termine generale della serie sia infinitesimo si deve imporre $\sqrt{x^2+4y^2} \le 4$. In questo caso la serie converge per il criterio di Leibniz. Il dominio è l'ellisse chiusa di centro l'origine e semiassi 4 e 2. È un insieme chiuso e limitato, quindi compatto. È connesso. Non è aperto. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{\pi a^2 h^2}{4}$. 5. si usi il teorema sulla derivata delle funzioni composte. 6. un punto di massimo relativo in $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^T$.

7. 3π. 8. $\frac{1}{6}(\log 2 - \frac{7}{12})$. 9. $p_2(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + (\log 2 - 1)x$ e $a\log 2 + a$.