Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 24
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Una reazione chimica di due sostanze che interagiscono in una soluzione si può rappresentare mediante l'equazione

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)\cdot(b-x),$$

dove $x(t)$ rappresenta la concentrazione della nuova sostanza presente nella soluzione al tempo t e a e b rappresentano le concentrazioni iniziali delle due sostanze interagenti. Dunque a e b sono costanti positive non maggiori di 1 e si suppone che non vi sia traccia della sostanza x all'istante iniziale ($x(0) = 0$). Si trovi la funzione $x(t)$ che descrive la produzione di sostanza x nel tempo, tenendo conto dei possibili casi $a = b$, $a > b$ e $a < b$. Qual è la concentrazione di x a regime? (Soluzione: $x(t) = \frac{ab(1-e^{k(b-a)t})}{a-be^{k(b-a)t}}$ se $a \neq b$, $x(t) = \frac{a^2kt}{akt+1}$ se $a = b$.)

Esercizio 2 Sia dato un circuito elettrico RLC (resistenza-induttanza-capacità). Le leggi di Ohm e di Kirchhoff forniscono la seguente equazione:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t),$$

dove I indica la corrente che circola nel circuito all'istante t, Q è la carica del condensatore all'istante t, E è la forza elettromotrice. Poiché $I = \frac{dQ}{dt}$ l'equazione diventa

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t).$$

Il tempo $t = 0$ indica il momento in cui si chiude il circuito, dunque si suppone $I(0) = 0$. Supponiamo inoltre che il condensatore sia inizialmente scarico, dunque $Q(0) = 0$. Si calcoli la corrente del circuito supponendo che la resitenza sia pari a 40 Ω, la capacità a $16\cdot 10^{-4}F$ e l'induttanza a 1 H. Si supponga inoltre che la forza elettromotrice sia fornita da un generatore a corrente alternata del tipo $E(t) = 100\cos(10t)$. Si trovi la carica del condensatore e la corrente del circuito al tempo t. (Sol. $Q(t) = 4/697[e{-}20t/3(-63\cos 15t - 116\sin 15t) + (21\cos 10t + 16\sin 10t)]$).

Esercizio 3 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali ordinarie:

$$\text{a)}\ \ y'' + y = \frac{1}{\cos x} \quad (0 < x < \pi/2)\,; \qquad \text{b)}\ \ y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}; \qquad \text{c)}\ \ y^{(iv)} + y' = x;$$

$$\text{d)}\ \ y''' - y' = (3-x)e^{-2x}; \qquad \text{e)}\ y''' + y' = x^2 + x; \qquad \text{f)}\ \ y^{vi} + y^{v} + x^{iv} + x^{iii} = x + 2e^x = x.$$

Esercizio 4 Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy:

$$\text{a)}\ \begin{cases} y' + y = x + e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}; \qquad \text{b)}\ \begin{cases} x^2\frac{dy}{dx} + 2xy = \cos x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}; \qquad \text{c)}\ \begin{cases} y'' - y' + y = \sin x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases};$$

$$d)\ \begin{cases} y'' = x + \sin x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \end{cases}; \qquad e)\ \begin{cases} y'' = -y^{-3}, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 5 Si risolvano le seguenti equazioni:

$$a)\ \ 3x^2y'' + xy' + 7y = 0, \qquad b)\ \ x^2y'' - 2xy' + 2y = x, \qquad c)\ \ (x+1)^2y'' - 3(x+1)y' + 4y = (x+1)^3.$$

Esercizio 6 Si risolvano i seguenti sistemi di e. d. lineari del primo ordine a coefficienti costanti:

$$a)\ \begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = x - y + t \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} x' = -x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x' = ay + bz \\ y' = cz \\ z' = 0 \\ x(0) = c_1 \\ y(0) = c_2 \\ z(0) = c_3 \end{cases}.$$