Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 23
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si consideri un corpo in caduta libera immerso in un fluido (si pensi ad esempio ad un paracadutista durante un lancio). Si studino le leggi del moto.

La seconda legge di Newton stabilisce che $F = m\,a$. Nel nostro esempio la forza ha due componenti: la forza di gravità, $m\,g$, che agisce dall'alto verso il basso, e la forza di attrito f_{attr}, che agisce in senso inverso ed è funzione della velocità del corpo.

L'equazione del corpo in caduta si può allora scrivere come segue: $mx'' = mg - f_{\text{attr}}(x')$.

L'equazione è solo apparentemente di secondo grado. Infatti si può pensare di risolverla rispetto alla velocità $v = x'$. L'equazione diventa allora $mv' = mg - f_{\text{attr}}(v)$.

Si studi l'equazione proposta nei casi

a) $f_{\text{attr}}(x') = kx'$ (buona approssimazione ad esempio per un corpo non troppo veloce in caduta nell'acqua);

b) $f_{\text{attr}}(x') = k(x')^2$ (buona approssimazione ad esempio per il paracadutista in caduta libera).

Esercizio 2 Si risolvano le seguenti equazioni lineari:

$$y' + \frac{y}{x} = e^x; \qquad y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + \frac{1}{x(1+x^2)}; \qquad y'\cos x = y\sin x + \sin 2x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

(Soluzioni: $y(x) = \lambda\frac{1}{x} + e^x - \frac{e^x}{x}$, $y(x) = \frac{\lambda}{1+x^2} + \frac{\log|x|}{1+x^2}$ definita su $]0, +\infty[$ oppure $]-\infty, 0[$, $y(x) = \frac{\lambda}{\cos(x)} + \sin x \cdot \operatorname{tg} x$.)

Esercizio 3 Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = yx\cos x \\ y(0) = 2 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} y' = y - xy^{1/3} \\ y(1) = \frac{\pi}{4} \end{cases} .$$

(Soluzioni: $y(x) = 2e^{x\sin x + \cos x - 1}$; $y(x) = \left(\left((\frac{\pi}{4})^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{2}\right)e^{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}} + \frac{3}{2} + x\right)^{\frac{3}{2}}$.)

Esercizio 4 Determinare una soluzione dell'equazione $y'' + y = 0$; che soddisfa le seguenti *condizioni al contorno*: $y(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot y(0)$; $y(\frac{\pi}{4}) = 3$. (Soluzione: $y(x) = \sqrt{2}\cos x + 2\sqrt{2}\sin x$.)

Esercizio 5 (Equazione logistica) Si trovi l'integrale generale dell'equazione $y' = ay(1 - by)$; dove a e b sono costanti reali positive. (Soluzione $y(t) = \dfrac{ce^{at}}{1 + bce^{at}}$.)

Si applichi la soluzione trovata per studiare il seguente modello di crescita di una popolazione (Verhulst):

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N(t)\left(1 - \frac{1}{k}N(t)\right);$$

dove $N > 0$ indica il numero di individui che costituiscono la popolazione, $k > 0$ rappresenta la capacità dell'ambiente di offrire risorse atte alla sopravvivenza, $\varepsilon > 0$. Si studi l'andamento delle soluzioni in dipendenza della condizione iniziale $N_0 = N(0)$, distinguendo i vari casi $N > k$, $N = k$, $N < k$.

(Soluzione $N(t) = \dfrac{kN_0e^{\varepsilon t}}{k - N_0 + N_0e^{\varepsilon t}}$.)

Esercizio 6 Sia dato un circuito elettrico RL (resistenza-induttanza). Le leggi di Ohm e di Kirchhoff forniscono la seguente equazione:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

dove I indica la corrente che circola nel circuito all'istante t, E è la forza elettromotrice. Il tempo $t = 0$ indica il momento in cui si chiude il circuito, dunque si suppone $I(0) = 0$.

a) Si calcoli la corrente del circuito supponendo che la resistenza sia pari a 12 Ω e l'induttanza a 4 H. Si supponga inoltre che la forza elettromotrice sia fornita da una batteria con costante voltaggio di 60 V. Si calcoli $I(t)$ e il valore limite della corrente (cioè la situazione a regime).

b) Si supponga ora che la resistenza e l'induttanza siano le stesse del problema precedente, ma che la forza elettromotrice sia fornita da una generatore a corrente alternata del tipo $E(t) = 60 \sin(30t)$ volts. Si trovi $I(t)$.