Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 22
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si classifichino le seguenti equazioni, come ordinarie o alle derivate parziali; si dica se sono autonome, lineari, se lineari omogenee e se ne determini l'ordine:

$$a)\quad 2(u-1)u' = 2t+1 \quad ; \quad b)\quad \log\left(\int_0^1 e^{-x^2}\,dx\right)\frac{dy}{dx} - e^{2x}y = \sin\sqrt{x} \quad ; \quad c)\quad xy\langle \nabla u(x,y),(x,y)^T\rangle = 3 \quad ;$$

$$d)\quad \frac{d}{dx}(xy'(x)) + 2y(x) = f(y) \quad ; \quad e)\quad \Delta u = 0 \quad ; \quad f)\quad \operatorname{div}(\operatorname{rot} g) = 0$$

$$g)\quad y^{(4)}\sin x + 3y''\cos x + y^{(5)} - g(x) = 0 \quad ; \quad h)\quad \sum_{i=1}^{3} a_i(x)y^{(i)}(x) = 0 \quad .$$

Esercizio 2 Si consideri l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

che modella la diffusione dell'energia termica di un filo nel punto x all'istante t. Si verifichi che la funzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

è soluzione di tale equazione, dove $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una qualunque successione limitata di numeri reali.

Esercizio 3 Senza calcolare le soluzioni cosa si può dire riguardo l'esistenza, l'unicità e l'esistenza globale dei seguenti problemi di Cauchy ? (Sia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una qualunque funzione continua)

$$(a)\quad \begin{cases} y' = \cos(xy) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad ; \quad (b)\quad \begin{cases} y' = g(x) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad ; \quad (c)\quad \begin{cases} y' = e^{xy} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad ; \quad (d)\quad \begin{cases} y' = y^{-1} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad .$$

Esercizio 4 Si risolvano le seguenti equazioni differenziali:

$$(a)\quad u' = 2^u; \qquad (b)\quad x^2y' + y = 0; \qquad (c)\quad y' = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{ye^y}.$$

Esercizio 5
Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy (specificando l'intervallo di definizione delle soluzioni):

$$(a)\quad \begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad ; \quad (b)\quad \begin{cases} yy' = 1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad ; \quad (c)\quad \begin{cases} y' = 2t\sqrt{1-y^2} \\ y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad ; \quad (d)\quad \begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases} \quad .$$

Esercizio 6 Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t} + \tan\frac{x}{t} \\ x(1) = \pi/4 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y' = \frac{xy-y^2}{x^2} \\ y(e) = e \end{cases} \quad .$$

Esercizio 7 Determinare un'equazione della curva del piano xy che passa per il punto $(2,3)^T$ e la cui pendenza in ogni suo punto $(x,y)^T$ è uguale a $\dfrac{2x}{1+y^2}$.