Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 21

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si calcoli l'area della superficie interna ottenuta intersecando due cilindri retti ortogonali tra loro di raggio $a > 0$. (Sol. $16a^2$.)

Esercizio 2 Si verifichi che il campo

$$g(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)^T$$

è irrotazionale. Si calcoli il lavoro compiuto dal campo su una particella di massa unitaria che percorre il circolo unitario di centro l'origine in verso antiorario. Si concluda che il campo g non è conservativo. Questo esempio contraddice il teorema che afferma che un campo è conservativo se e solo se è irrotazionale?

Esercizio 3 Si usi il teorema di Stokes per calcolare il valore assoluto del lavoro compiuto dal campo $g(x,y,z) = (-z,x,y)^T$ su una particella di massa unitaria che percorre la curva γ, intersezione del piano $z = y$ con il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. (Il segno dipenderà dall'orientazione della curva; sol. $\frac{\pi}{2}$).

Esercizio 4 Si usi il teorema della divergenza per calcolare il flusso del campo

$$g(x,y,z) = (ye^{x+y}, -xe^{x+y}, xy)^T$$

uscente dalla superfice del solido

$$E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : |y| \le x \le 2 - |y|, \quad 0 \le z \le x + y\}.$$

Esercizio 5 Si provi che il campo $g(x,y,z) = (z+1, y+1, x+1)^T$ è conservativo. Si calcoli $\int_\gamma \langle g, \tau \rangle \, ds$ dove γ è una curva congiungente i punti $(1,2,0)^T$ e $(3,0,4)^T$.

Esercizio 6 Si calcoli la circuitazione

$$\oint_\gamma (e^x \sin y + 3y)\, dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\, dy$$

sull'ellisse γ definita dall'equazione $4x^2 + y^2 = 4$ e percorsa in verso antiorario. (Sugg. si osservi che il campo è somma di un campo conservativo e di un campo facile da integrare. Sol. -2π).

Esercizio 7 Siano $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale opportunamente differenziabile e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo scalare opportunamente differenziabile. Si dica se ha senso considerare i seguenti operatori:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{rot}\,(\nabla g); & \mathrm{rot}\,(\nabla f); & \mathrm{rot}\,(\mathrm{div}\, f); \\ \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, g); & \nabla(\mathrm{div}\, g); & \nabla(\mathrm{div}\, f); \\ \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\, g); & \mathrm{div}\,(\nabla f); & f(\mathrm{rot}\, g). \end{array}$$

Esercizio 8 Siano $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale opportunamente differenziabile e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo scalare opportunamente differenziabile. Si provi che

$$\mathrm{rot}\, \nabla f = \overline{0}; \qquad \mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, g = 0; \qquad \mathrm{div}\, \nabla f = \triangle f; \qquad \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\, g) = \nabla \mathrm{div}\, g - \triangle g.$$

dove $\triangle f = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ è detto il Laplaciano di f.