

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 20

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si determini una funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che il campo vettoriale $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definito da

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} \varphi(x, y) \\ -y \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix},$$

sia conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$.

Esercizio 2 Si calcoli il lavoro compiuto dal campo $g(x, y, z) = (xy, yz, zx)^T$; nel muovere una particella di massa unitaria lungo la curva di equazioni $x(t) = t$; $y(t) = t^2$; $z(t) = t^3$; dove $t \in [0, 1]$.

Esercizio 3 È noto che il campo $g(x, y) = (ye^x, e^x - \cos y)^T$ è conservativo.

Si calcoli il lavoro compiuto da F per muovere una particella di massa unitaria lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$; con $\gamma(t) = (t \cos t, 1 - \sin t)^T$.

Esercizio 4 Si usi la formula di Gauss-Green per calcolare l'area della regione del piano, contenuta nel primo quadrante, delimitata superiormente dalla retta $y = \frac{1}{2}$ e inferiormente dalla parabola $2y = x^2$. (Sol. $\frac{1}{3}$)

Esercizio 5 Si usi la formula di Gauss-Green per calcolare l'integrale

$$\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) dy,$$

dove C è il cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 9$, orientato in verso antiorario. (Sol. 36π)

Esercizio 6 Si consideri il campo vettoriale

$$g(x, y, z) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{3z})^T.$$

Si provi che g è un campo conservativo e si calcoli un suo potenziale.