

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 19

Dott. Franco Obersnel

**Esercizio 1** Si trovi un'equazione parametrica per rappresentare la parte limitata del paraboloide ellittico  $y = 6 - 3x^2 - 2z^2$ , delimitato dal piano  $xz$ . Si scriva l'equazione del piano tangente nel generico punto. (Sol. Ad esempio  $x(u, v) = u$ ,  $y(u, v) = 6 - 3u^2 - 2v^2$ ,  $z(u, v) = v$ ; dove  $(u, v)^T \in \{(u, v)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{3} \leq 1\}$ ; il piano tangente è  $6x_0x + y + 4z_0z - 3x_0^2 - 2z_0^2 - 6 = 0$ .)

**Esercizio 2** Si consideri la superficie rappresentata dalle seguenti equazioni parametriche  $x(u, v) = uv$ ,  $y(u, v) = ue^v$ ,  $z(u, v) = ve^u$ , con  $(u, v)^T \in \mathbb{R}^2$ . Si dica se la superficie è regolare e si calcoli l'equazione del piano tangente nel generico punto della superficie. (Sol. La superficie è regolare in ogni punto ad eccezione del punto  $(1, e, e)^T$ . Il piano tangente alla superficie nel punto  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$  è  $e^{u+v}(1 - uv)(x - uv) + ve^u(u - 1)(y - ue^v) + ue^v(v - 1)(z - ve^u) = 0$ . Il piano tangente non è definito nel punto  $(1, e, e)^T$  che si ottiene per  $(u, v)^T = (1, 1)^T$ .)

**Esercizio 3** Si calcoli l'area della parte del paraboloide iperbolico  $z = y^2 - x^2$  che è delimitata dai cilindri  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ . (Sol.  $\frac{\pi}{6} \left( 17^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} \right)$ .)

**Esercizio 4** Si calcoli l'integrale  $\iint_S z \, d\sigma$ , dove  $S$  è la superficie definita dal cilindro di equazione cartesiana  $x^2 + y^2 = 1$ , dal disco  $D = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$  e dalla porzione di piano  $\pi = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x - z + 1 = 0; x^2 + y^2 \leq 1\}$ . (Sol.  $\iint_S z \, d\sigma = \pi \left( \sqrt{2} + \frac{3}{2} \right)$ .)

**Esercizio 5** Si consideri il solido generato da un triangolo equilatero di lato  $a$ , ruotato attorno ad uno dei suoi lati. Si usino i teoremi di Pappo-Guldino per determinare la superficie e il volume del solido. (Sol. Il volume è  $\frac{\pi}{4}a^3$ , l'area è  $\sqrt{3}\pi a^2$ .)