Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 16
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Siano $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$. Si definisce prodotto misto (o triplo) di $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ il numero $\langle \overline{a} \wedge \overline{b}, \overline{c} \rangle$ ($\wedge$ indica il prodotto vettoriale, $\langle\ ,\ \rangle$ indica il prodotto scalare). Si verifichi che $\langle \overline{a} \wedge \overline{b}, \overline{c} \rangle = \det A$, dove A è la matrice quadrata che ha per colonne le componenti dei tre vettori. Si provi che $|\langle \overline{a} \wedge \overline{b}, \overline{c} \rangle|$ è il volume del parallelepipedo individuato da $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$.

Esercizio 2 Si calcoli l'integrale $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$, dove $D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \leq 1;\ y \geq x\}$.

Esercizio 3 Si calcoli il volume della regione di spazio interna alla semisfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 4$ con $z \geq 0$ ed esterna (cioè che sta sotto) al cono di equazione $z^2 = x^2 + y^2$ (cioè $z \leq \sqrt{x^2+y^2}$).

Esercizio 4
Si usino coordinate ellittiche per calcolare l'integrale
$\displaystyle\iint_E (x+y)\ dxdy$ dove E è la regione interna all'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Esercizio 5
Si calcoli la massa del cono $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \in [1,2],\ z \leq 2 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ se la sua densità nel punto $(x,y,z)^T$ è inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto dal piano $z = 0$.

Esercizio 6
Si consideri la seguente trasformazione lineare di coordinate nel piano:
$u = 3x - y$, $v = y - x$, e l'inversa $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u+3v}{2}$.
Si utilizzi tale trasformazione per calcolare più agevolmente l'integrale

$$\iint_D (3x-y)^{\frac{1}{5}} \left(-\frac{x}{4} + \frac{y}{4}\right)\ dxdy,$$

nel parallelogramma delimitato dalle rette $y = 3x$, $y = x$, $y = 3x - 1$, $y = x + 4$.

Esercizio 7 Si consideri l'insieme

$$S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : y \in [1,+\infty); x^2 + z^2 \leq \frac{1}{y^2}\}.$$

Si calcoli il volume di tale solido, calcolato come limite per $b \to +\infty$ del volume V_b del solido

$$S_b = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : y \in [1,b]; x^2 + z^2 \leq \frac{1}{y^2}\}.$$

Si verifichi che l'area della sezione

$$\{(y,z)^T \in \mathbb{R}^2 : \exists x \geq 1,\ (x,y,z)^T \in S\},$$

è infinita.
Il risultato ottenuto sembra paradossale?
Come fate a spiegare questo fatto?