Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 15
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si calcoli il volume della sfera in tre modi:
a) usando un integrale doppio;
b) usando un integrale triplo ed integrando per sezioni;
c) usando un integrale triplo e coordinate sferiche.

Esercizio 2 Si calcoli il momento di inerzia rispetto al piano xy, $I_{xy} = \int_S z^2 dm$ del solido S:

$$S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4;\ z \geq 0;\ z^2 \geq x^2 + y^2\}.$$

Esercizio 3 Si calcoli il volume del solido

$$D = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4;\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

Si tratta della regione compresa tra i due cilindri di raggio 1 e 2 rispettivamente, che si trova sotto al paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$.

Esercizio 4 Si calcoli il volume del solido ottenuto dall'intersezione di due cilindri a base circolare di raggio unitario prependicolari tra di loro:

$$E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1;\ x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(Si integri per sezioni.)

Esercizio 5 Si calcoli il centro di massa del solido S che occupa il primo ottante dello spazio $\mathbb{R}^3$ (cioè $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) ed è contenuto nella sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, se la densità del corpo è proporzionale alla distanza dall'origine (cioè $\rho(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Esercizio 6 Sia S un solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse z la figura $F = \{(x,z)^T \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b; f(z) \leq x \leq g(z)\}$;
dove $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue.
Si provi che il momento di inerzia rispetto all'asse z del solido $I_z = \iiint_S x^2 + y^2\, dxdydz$, è uguale a $I_z = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\int_a^b \left[g^4(z) - f^4(z)\right]\, dz.$

Esercizio 7
Si calcolino il volume e il baricentro del solido

$$S = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : (1-z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$