

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 13

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ un parallelepipedo di \mathbb{R}^3 . Si diano le definizioni di decomposizione δ di R in sottoparallelepipedo; di somma inferiore e somma superiore di una funzione $f : R \rightarrow \mathbb{R}$; di integrale $\int_R f \, dm$.

Esercizio 2 Detto a il numero reale

$$a = \iint_D \sqrt{x^3 + y^3} \, dx dy, \quad D = [0, 1] \times [0, 1],$$

si provi che $a \in [0, \sqrt{2}]$.

Esercizio 3 Senza utilizzare le formule di riduzione, ma tenendo presente le proprietà di linearità dell'integrale e la formula del volume di un prisma retto, si calcoli l'integrale della funzione $f(x, y) = 3x + 4y$ sul rettangolo $[0, 1] \times [0, 2]$.

Esercizio 4 Si calcolino i seguenti integrali:

- $\iint_R x \sin(x + y) \, dx dy$ dove $R = [0, \frac{\pi}{6}] \times [0, \frac{\pi}{3}]$.
- $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} \, dx dy$ dove $R = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq 3\}$.
- $\iint_R \frac{1}{x + y} \, dx dy$ dove $R = [1, 2] \times [0, 1]$.

Esercizio 5 Si calcoli il volume del solido delimitato dal paraboloide ellittico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, dai piani $x = 2$, $y = 2$ e dai 3 piani coordinati.

Esercizio 6 Si calcoli il volume della zona di spazio delimitata superiormente dal piano

$$z = 2x + 5y + 1,$$

situata sopra al rettangolo

$$\{(x, y, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 0; 1 \leq y \leq 4\}.$$

Esercizio 7 Si calcoli il volume del solido delimitato dalla superficie $x\sqrt{4x^2 + 4y} - 2z = 0$ e dai piani $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$.

Esercizio 8 Si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint_R \frac{xz}{y} \, dx dy dz \quad R = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 1].$$