Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 12
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si consideri il pentagono in figura, costituito da un triangolo isoscele sovrapposto ad un rettangolo. Il pentagono ha perimetro fisso P. Si trovino le lunghezze dei lati del pentagono che massimizzano l'area. (Sol. base= $P(2-\sqrt{3})$, altezza= $P\,\frac{3-\sqrt{3}}{6}$, lato obliquo= $P\,\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$)

Esercizio 2 Si trovino gli estremi della funzione

$$f(x,y,z) = x + 2y;$$

vincolata alla curva definita dall'intersezione delle superfici di equazioni:

$$x + y + z = 1; \qquad y^2 + z^2 = 4.$$

(Sol. Max $1 + 2\sqrt{2}$, min $1 - 2\sqrt{2}$)

Esercizio 3 Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una funzione di classe C^1 su $[a,b]$. Si consideri la curva definita dal grafico Γ_f della funzione f.

Si provi che la lunghezza s dell'arco della curva è data dalla formula

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Esercizio 4 Si calcoli la lunghezza della curva piana definita come grafico della funzione $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ con $x \in [1,8]$.

Esercizio 5 Si calcoli l'area del cilindro (solo la superficie laterale, senza base né tappo...) delimitato dal grafico della funzione $f(x,y) = y^2$ e dalla semicirconferenza $x = \cos t$, $y = \sin t$ per $\pi \le t \le 2\pi$.

(Cioè la superficie $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le z \le y^2,\ \pi \le t \le 2\pi.\}$)

Esercizio 6 Sia $f : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ una funzione crescente di classe C^1, e sia g la funzione inversa $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $g = f^{-1}$, sempre di classe C^1.

Si provi che

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy.$$