Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 11
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva

$$\gamma(t) = \left(\cos t \sin t, \sin^2 t, 2t\right)^T .$$

Si dica se γ è una curva continua, regolare, semplice. Si disegni uno schizzo della curva. Si trovino le equazioni del vettore tangente la curva nel punto $\gamma(t)$.

Esercizio 2 Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma(t) = \left(t^2 - t, 2t^3 - 3t^2 + t\right)^T .$$

Si dica se γ è una curva regolare, semplice. Si trovino le equazioni del vettore tangente la curva nel punto $\gamma(t)$. Si trovino i valori del parametro t per i quali la curva è contenuta nel semipiano $x \leq 0$. Si dica se il sostegno dell'arco di curva contenuto in tale semipiano è un insieme limitato di $\mathbb{R}^2$. Si dica se la curva γ è limitata. Si disegni uno schizzo della curva.

Esercizio 3 Si stabilisca che esistono e si calcolino massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2 + 1}$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x^2 = 0\}.$$

Esercizio 4 Si provi che due curve regolari equivalenti hanno versori tangenti con la stessa direzione.

Esercizio 5 Si trovino gli estremi della funzione $f(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$; vincolata all'insieme $E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}\}$ $\quad a \in \mathbb{R}^+$.

Esercizio 6 Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3 :$$

ristretta al triangolo di vertici $(0, 0)^T$, $(0, 6)^T$, $(6, 0)^T$.

Esercizio 7 Si trovino i valori massimo e minimo assoluti per la funzione $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x + 1$ nel dominio a forma di mezza luna costituito da tutti i punti del disco $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ posti alla sinistra del ramo destro dell'iperbole $x^2 - y^2 = 1$.

Soluzioni:
(Sol. 3 Max $\frac{1}{2}$, min $-\frac{1}{2}$.)
(Sol. 5 Punto di massimo $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})^T$, punto di minimo $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})^T$.)
(Sol. 6 Max 4, min -64)
(Sol. 7 Min=$1 - \sqrt{\frac{32}{27}}$ nel punto $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T$, Max=$\frac{5+\sqrt{3}}{4}$ nei punti $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^T$.)