Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 10
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $f : B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile definita nella palla-aperta di raggio 1 centrata nell'origine. Supponiamo che $||\nabla f(\mathbf{x}|| \leq 1$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, 1)$. Sia inoltre $f(\mathbf{0}) = 0$.
Si dimostri che la funzione f è limitata su $B(\mathbf{0}, 1)$ e che si ha $|f(\mathbf{x})| \leq 1$ per ogni $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, 1)$.

Esercizio 2 Si trovino i punti dell'ellissoide

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1;$$

nei quali il piano tangente è parallelo al piano π di equazione

$$3x - y + 3z = 1.$$

Esercizio 3 La temperatura in un punto $(x, y, z)^T$ è data dalla funzione

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2};$$

dove T è misurata in gradi centigradi e x, y, z in metri.
a) Si calcoli il tasso di variazione della temperatura nel punto $P = (2, -1, 2)^T$ nella direzione verso il punto $Q = (3, -3, 3)^T$.
b) In quale direzione vi è la massima variazione istantanea di temperatura nel punto P ?
c) Si calcoli tale massima variazione.

Esercizio 4 Si trovino gli estremi della funzione

$$f(x, y) = e^{-xy};$$

nella regione

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

(Sol. Max $e^{\frac{1}{4}}$, min $e^{-\frac{1}{4}}$)

Esercizio 5 Si trovino i punti della superficie di equazione

$$xy^2z^3 = 2$$

che sono più vicini all'origine.
(Sol. $\left(3^{-\frac{1}{4}}, (\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}\right)^T$, $\left(3^{-\frac{1}{4}}, -(\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}\right)^T$, $\left(-3^{-\frac{1}{4}}, (\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}}\right)^T$, $\left(-3^{-\frac{1}{4}}, -(\frac{4}{3})^{\frac{1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}}\right)^T$)