Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 9
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si calcoli l'approssimante quadratico (polinomio di Taylor di ordine 2) della funzione

$$f(x,y) = 3\sin(xy) + \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

nel punto $(1,\pi)^T$.

Esercizio 2 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$; è possibile per f avere 2 punti di massimo relativo e nessun punto di minimo relativo? Si discuta tale questione confrontando con quanto avviene per funzioni in più variabili, considerando e studiando la funzione

$$f(x,y) = -(x^2-1)^2 - (x^2y - x - 1)^2.$$

(Sol. No, se si considera minimo in senso debole. Per la funzione proposta $(1,2)^T$ e $(-1,0)^T$ sono punti di massimo relativo e assoluto; la funzione non ammette nessun punto di minimo relativo)

Esercizio 3 Uno scatolone a base rettangolare senza coperchio deve contenere un volume di 32000 cm^3. Si trovino le dimensioni (altezza, larghezza e profondità) che minimizzano la quantità di cartone impiegato.

(Sol. 20,40,40)

Esercizio 4
a) Si provi che esistono massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

nella palla unitaria chiusa $D = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.
b) Si osservi che per ogni $(x,y)^T \in D$ si ha $|xy| \leq \frac{1}{2}$.
c) Si determini l'unico punto critico di f nella palla aperta, e si verifichi che non è un punto di estremo.
d) Si concluda che i punti di minimo e di massimo devono avere norma 1.
e) Si calcolino massimo e minimo di f su D.
(Sol. Max $\sin\frac{1}{2}$, min $-\sin\frac{1}{2}$)

Esercizio 5 Si trovino eventuali punti estremali locali e assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy}.$$

(Sol. $(-\frac{1}{2},4)^T$ punto di massimo relativo; non vi sono estremi assoluti)

Esercizio 6 Si studino i punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz + 5x + y - z + 3.$$

(Sol. $(-6,-4,\frac{7}{2})^T$ punto di min. relativo)

Esercizio 7 Classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz.$$

(Sol. $(\frac{2}{3},0,\frac{2}{3})^T$ punto di min. relativo, $(0,0,0)^T$ punto di sella)