Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 8
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si trovino il massimo e il minimo assoluti della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Esercizio 2 Si scriva la matrice Hessiana della funzione

$$f(x,y,z) = z\,\sqrt{1+x^2+y^2};$$

precisando l'insieme su cui è definita.

Esercizio 3 Si verifichi che la funzione

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

è soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(Questa è l'equazione del calore, che modella la temperatura u di un corpo che scambia calore con l'ambiente; una soluzione dell'equazione data è una funzione $u(x,t)$ che, sostituita all'equazione data, la soddisfa per ogni $(x,t) \in A$, dove A è un opportuno dominio di $\mathbb{R}^2$).

Esercizio 4 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Si verifichi che la funzione f ammette tutte le derivate parziali del primo ordine e che queste sono continue su $\mathbb{R}^2$. Si calcolino poi le derivate seconde nell'origine e si facciano opportune osservazioni alla luce del teorema di Schwarz.

Esercizio 5 Si trovino i punti di massimo e minimo relativo per la funzione $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

(Sol. $(0,0)^T$ punto di sella, $\pm(1,1)^T$ punti di minimo.)

Esercizio 6 Si studino i punti critici della funzione $f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

(Sol. $(0,0)^T$ punto di sella; $\pm(1,1)^T$ punti di massimo relativo; $\pm(-1,1)^T$ punti di minimo relativo)

Esercizio 7 Determinare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = (3x - x^3)(3y - y^3);$$

classificandoli come punti di minimo o di massimo relativo o punti di sella. Stabilire se la funzione ammette massimo e/o minimo assoluti.

(Sol. $(0,0)^T$, $\pm(0,\sqrt{3})^T$, $\pm(\sqrt{3},0)^T$, $\pm(\sqrt{3},\pm\sqrt{3})^T$ punti di sella; $\pm(1,1)^T$ punti di massimo relativo, $\pm(-1,1)^T$ punti di minimo relativo)