Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Esercizi 6
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Detta $\overline{A}$ la chiusura di A, sia $f : \overline{A} \to \mathbb{R}^M$ una funzione continua. Si provi che $f(A)$ è un insieme limitato.

Si dia un esempio di un insieme limitato $A \subset \mathbb{R}$ e di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $f(A)$ è un insieme illimitato.

Esercizio 2 Si verifichi che non esiste il seguente limite:

$$\lim_{\|(x,y)^T\| \to +\infty} e^{-|x-y|}.$$

(Sugg. si guardi cosa succede sulla bisettrice del primo e terzo quadrante).

Esercizio 3 Si verifichi che la seguente funzione non è continua nel punto $(0,0)^T$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$$

Esercizio 4 Si calcoli la derivata direzionale nell'origine lungo la direzione del versore $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ della funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$

Esercizio 5 Si calcolino (nel generico punto del dominio) le derivate parziali e il gradiente delle funzioni
a) $f(x,y) = \log(x+y)$;
b) $g(x,y,z) = zx^y$;
c) $h(s,t,u,v,w) = s + 2t + 3u^2 + 4v^3 + stuvw$;
d) $k(x,\phi) = x\sin(x\phi + 3)$.

Esercizio 6 Si scriva (nel generico punto del dominio) la matrice Jacobiana delle seguenti funzioni:
a) $f(x,y) = (x + xy, e^{xy})^T$;
b) $g(x,y,z) = (xy\cos z, x^2 + y)^T$;
c) $h(x,y) = (x^2y + \log y, y^2x + \log x, xy, x - y)^T$;
d) $k(u,v) = (\cos u \sin u, v^v)$.

Esercizio 7 Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 0 & \text{se } (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$$

a) Si consideri la restrizione della f alla curva $y = x^2$.
b) Si calcoli il limite per $(x,y)^T \to (0,0)^T$ di tale restrizione.
c) Si deduca da b) che la funzione f non è continua nell'origine.
d) Si verifichi che la funzione f è derivabile in ogni direzione (cioè ammette tutte le derivate direzionali) nell'origine.