

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 5

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si provi che ogni insieme del tipo $]a, b[\times]c, d[$ è aperto in \mathbb{R}^2 .

Esercizio 2 (Densità di \mathbb{Q}^2 in \mathbb{R}^2 .) Si provi che ogni insieme aperto di \mathbb{R}^2 contiene un punto $(p, q)^T$ con $p, q \in \mathbb{Q}$.

Esercizio 3 Si provino le seguenti proprietà degli intorni in \mathbb{R}^N . Sia \mathcal{N}_x la famiglia degli intorni di x , allora

- Sia $U \in \mathcal{N}_x$, allora $x \in U$.
- Siano $U, V \in \mathcal{N}_x$, allora $U \cap V \in \mathcal{N}_x$.
- Siano $U \in \mathcal{N}_x$ e $U \subset V$; allora $V \in \mathcal{N}_x$.
- (Proprietà di separazione di Hausdorff) Siano $x \neq y$. Allora esistono $U \in \mathcal{N}_x, V \in \mathcal{N}_y$ tali che $U \cap V = \emptyset$.

Esercizio 4 Si descrivano o si disentino le superfici di livello delle funzioni

- $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;
- $f(x, y) = xe^{-y}$;
- $f(x, y) = x^2 - 2x - y$;
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$;
- $f(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Esercizio 5 Si guardi una qualunque carta topografica sulla quale siano riportate le isoipse. Le strade sono più ripide dove le curve sono più ravvicinate: perché?

Esercizio 6 Si spieghi perché la seguente funzione è continua sul suo dominio:

$$F(x, y, z) = \left(\sin \left(x \sqrt{\frac{|y|}{z}} \right), \frac{\sin z}{|z|}, \operatorname{sgn}(z) \right) \text{ dove } \operatorname{sgn}(t) = 1 \text{ se } t > 0, \operatorname{sgn}(0) = 0 \text{ e } \operatorname{sgn}(t) = -1 \text{ se } t < 0.$$

Esercizio 7 Si ponga in corrispondenza ciascuna delle seguenti equazioni con il grafico, scegliendolo da quelli presentati nel foglio allegato: (non presente se scaricato dalla rete)

- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$;
- $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$;
- $x^2 - y^2 + z^2 = 1$;
- $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
- $y = 2x^2 + z^2$;
- $y^2 = x^2 + 2z^2$;
- $x^2 + 2z^2 = 1$;
- $y = x^2 - z^2$.