Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 3

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si dimostri il seguente criterio di sviluppabilità. Sia $h > 0$, e sia $I =]x_0 - h, x_0 + h[\subset \mathbb{R}$. Supponiamo che esista una costante $M > 0$ tale che $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M\dfrac{n!}{h^n}$ per ogni n e per ogni $x \in I$. Allora la funzione f è sviluppabile in serie di Taylor in x_0.

Esercizio 2 Si rappresenti in serie di Taylor di centro 0 la funzione $e^x - \dfrac{1}{1-x}$ e se ne calcoli il raggio di convergenza.

Esercizio 3 Si verifichi che $\cos\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$ e $\sin\vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$.

Esercizio 4 Si calcoli una primitiva della funzione

$$f(x) = e^{(x^k)}$$

dove $k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 1$, rappresentandola in serie.

Esercizio 5
Mediante lo sviluppo in serie della funzione

$$f(x) = e^{(x^2)}$$

si calcolino nel punto $x = 0$ le derivate di ogni ordine $f^{(n)}(0)$.

Esercizio 6
Calcolare (esprimendo il risultato in serie numerica)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(t^2)}{t^2}\, dt.$$

Esercizio 7 Si risolva l'equazione $\dfrac{1+x}{1-x} = 3$. Si usi tale soluzione per rappresentare il numero $\log 3$ come serie di potenze.

Soluzioni

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-n!}{n!} x^n$, $\rho = 1$.
2. Si usi la formula di Eulero.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{nk+1}}{n!(nk+1)}$.
4. Confrontando i coefficienti dello sviluppo in serie della funzione e della sua serie di Taylor si ottiene $f^{(2n)}(0) = (n+1)(n+2)\cdots(2n)$, $f^{(2n+1)}(0) = 0$.
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(4n+1)2^{4n+1}}$.
6. $y = \frac{1}{2}$; $\log(1+\frac{1}{2}) - \log(1-\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(1/2)^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)4^n}$.