Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 2

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Supponiamo di sapere che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x+1)^n$ converge semplicemente (non assolutamente) nel punto $x=-3$. Può la serie convergere nel punto $x=2$?

Esercizio 2 Si calcoli il raggio di convergenza e si studi il comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza delle serie seguenti:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{\sqrt{n+1}}$. (Sol. $E =]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$)

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} x^n$. (Sol. $E =]-1,1[$)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n$. (Sol. $E =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}(x-4)^n$. (Sol. $E =]2,6[$)

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}\ 2^n} x^n$. (Sol. $E =]-2,2]$)

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{e^n}(x-e)^n$. (Sol. $E =]0,2e[$)

g) (Si calcoli solo il raggio di convergenza) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$ con $k \in \mathbb{N}$. (Sol. $\rho = k^k$).

Esercizio 3

a) Si calcoli la somma di $\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2-n)\ x^n$.

(Sol. $\frac{2x^2}{(1-x)^3}$)

b) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ usando il teorema di integrazione.

(Sol. $\frac{1}{2x}\log(\frac{1+x}{1-x})$ per $|x|<1$, $x \neq 0$, 1 se $x=0$)

c) Si calcoli la somma della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1}\ x^n$.

(Sol. $\frac{1}{1-x} - \frac{\log(1-x)}{x}$ per $|x|<1$, 2 se $x=0$)

d) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

(Sol. $\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x$ per $|x|<1$, $x \neq 0$, 1 se $x=0$)

e) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ distinguendo i casi $x>0, x=0, x<0$.

(Sol. se $x<0$ si ha $x=-(\sqrt{-x})^2$ e posso usare l'esercizio d): $\frac{1}{\sqrt{-x}}\operatorname{arctg}\sqrt{-x}$ per $x>-1$; 1 se $x=0$; se $x>0$ si ha $x=(\sqrt{x})^2$ e posso usare l'esercizio b): $\frac{1}{2\sqrt{x}}\log(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})$ per $x<1$)