Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 36

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1

a) Si provi che se una serie è semplicemente convergente (non assolutamente convergente), allora esistono necessariamente infiniti termini di segno negativo e infiniti termini di segno positivo della serie.

b) Si provi che se per una serie è applicabile il criterio del rapporto, allora il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine soprareale. (Si pensi alla serie geometrica, che tipo di infinitesimo è il termine generale di una serie geometrica? Con cosa si maggiora una serie per la quale vale il criterio del rapporto?)

Esercizio 2 Si studi il carattere delle serie seguenti:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\sqrt{n}} + \frac{3}{n^3}$. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{\alpha^n}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n!$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^{n^2}$. e) $1 - a + \frac{1}{2} - a^2 + \frac{1}{3} - a^3 + \ldots$ con $0 < a < 1$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$.

Esercizio 3 Si consideri la seguente serie (di Mengoli): $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

a) si provi che $a_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$;

b) si scrivano le ridotte s_1, s_2, s_3 e si calcoli la ridotta n-esima s_n;

c) si calcoli $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$;

d) si scrivano le somme di $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e di $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Esercizio 4 Si studi il carattere delle seguenti serie, distinguendo se è il caso tra convergenza semplice e convergenza assoluta:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)\cos(\frac{\pi}{n})}{n}$. b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{na}{n^2 + a^2}$ con $a \in \mathbb{R}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{\sqrt{n+1}}$. d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}})$. e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n!\, n^{-\frac{n}{2}} \operatorname{arctg}(n)$.

Soluzioni

2. a) Converge (ord. inf.). b) Converge per $\alpha > 1$ (rapporto o ord. inf.). c) Diverge ($a_n > 2e^{-3}n$ per $n \geq 3$). d) Converge (radice). e) Diverge (somma di una serie armonica e di una serie geometrica convergente). f) Converge (rapporto o si osservi che $a_n = \frac{1}{2^n}$).

3. b) $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. c) 1. d) 1 e $\frac{1}{3}$.

4. a) Converge semplicemente. b) Converge semplicemente per ogni $a \neq 0$, assolutamente per $a = 0$. c) Converge semplicemente. d) Converge semplicemente e) Diverge.