Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi 35

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Rispondere alle seguenti questioni:

a) Siano $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ e $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$ due serie convergenti. Cosa si può dire della serie somma $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots$? E se una delle due serie diverge e l'altra converge?

b) Supponiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Cosa possiamo dire di $\sum_{n=3}^{+\infty} a_n$?

c) Supponiamo che $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ sia una serie a termini positivi e che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Cosa possiamo dire di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}$?

d) Supponiamo che $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ sia una serie a termini positivi e che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} = s \in \mathbb{R}$. Cosa possiamo dire di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$?

e) Si provi che il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è uguale al carattere della serie $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2 Si usi l'integrale generalizzato per provare

a) che la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\,\log(n)\,\log(\log n)}$ diverge;

b) che la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\,(\log(n))^2}$ converge ad una somma s con $s < \frac{1}{\log 2}$.

Esercizio 3 Si calcoli la somma della serie $\displaystyle\frac{11}{100} + \frac{101}{100^2} + \frac{1001}{100^3} + \frac{10001}{100^4} + \ldots$.

Esercizio 4 Si provi che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ di termine generale $a_n = \dfrac{3}{1 + \cos n + 2^n}$ è convergente ad un numero reale s e che $\frac{3}{2} \le s \le 3$. (sugg.$-1 \le \cos n \le 1$; inoltre se $n \ge 1$ si ha $2^n + 2 \le 2^{n+1}$)

Esercizio 5

a) Si determini per quali valori di x la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (1 + 3x)^n$ risulta essere convergente, e se ne calcoli la somma.

b) Si determini per quali valori di α, limitatamente all'intervallo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \sin^{2n} \alpha$ risulta essere convergente, e se ne calcoli la somma.

Soluzioni

1. a) converge alla somma della serie, diverge. b) $= s - a_0 - a_1 - a_2$. c) converge a $s' \le s$. d) nulla. e) le ridotte delle due serie differiscono per una costante.

2. a) $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \log x \log(\log x)}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \log(\log(\log b)) - \log(\log(\log 3)) = +\infty$. b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx = \frac{1}{\log 2}$.

3. È la serie somma di due serie geometriche convergenti di termine generale $(1/10)^n + (1/100)^n$; la somma è $1/9 + 1/99$.

4. confronto con serie geometriche $3/2\ (1/2)^n \le a_n \le 3\ (1/2)^n$.

5. a) $-(1/(3x))$ per $-(2/3) < x < 0$. b) $1/(1 - 2\sin^2(\alpha))$ per $0 < \alpha < \pi/4$.