Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 34

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si calcolino gli integrali generalizzati

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x2^{-x^2}\,dx.$ b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \min\{x^{-\frac{1}{2}}, x^{-2}\}\,dx.$ c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}}\,dx.$

d) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \left(e^{-5x} + \frac{1}{x(\log x)^2}\right)dx.$

Esercizio 2 La funzione Gamma di Eulero $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è definita mediante l'integrale generalizzato

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

Si verifichi che la funzione è definita per ogni $x > 0$. Si provi che per ogni $x > 0$ si ha $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e, in particolare, $\Gamma(n+1) = n!$ per ogni numero naturale n.

Esercizio 3 Si stabilisca se la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$ è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $[\pi, +\infty[$.

Esercizio 4 Si verifichi che la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ è integrabile in senso generalizzato sull'intervallo $[\pi, +\infty[$. (Sugg. si integri per parti e si applichi il criterio dell'ordine di infinitesimo al nuovo integrale)

Esercizio 5 Si studi la funzione $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt[3]{t}e^{-t}$ (dominio, monotonia, estremi, segni, limiti, convessità, grafico).

Esercizio 6 Si calcolino le derivate delle funzioni

a) $f(x) = \displaystyle\int_{-3x}^{x^2} e^{-t^2}\,dt.$ b) $f(x) = \displaystyle\int_{4x}^{-\sqrt{x}} \frac{t^4}{1+t^3}\,dt.$ c) $f(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt.$

d) $f(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} \operatorname{sen}(x^2)\,dt.$

Esercizio 7 Si scriva il polinomio di Taylor-Maclaurin di ordine 3 della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt.$

Soluzioni.

1. a) 0. b) 3. c) 0. d) $\frac{1}{5}e^{-2} + \frac{1}{\log 2}$. 2. Si usi l'integrazione per parti. 3. Sì.

6. a) $2xe^{-x^4} + 3e^{-9x^2}$. b) $-\frac{x\sqrt{x}}{2(1-x\sqrt{x})} - 256\frac{x^4}{1+64x^3}$. c) $-(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen}(\cos^2(x)) - (\cos x)\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x)$. d) $2x\cos(x^2)(\cos x - \operatorname{sen} x) - \operatorname{sen}(x^2)(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

7) $P_3(x) = x^2$.