Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 32

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile su un intervallo I. Si provi che due funzioni integrali di f differiscono tra loro per una costante additiva (cioè, se F_{x_0} e F_{x_1} sono due funzioni integrali di f relative ai punti x_0 e x_1 rispettivamente, la differenza $F_{x_0}(x) - F_{x_1}(x)$ è costante su I).

Esercizio 2 Si calcolino i seguenti integrali:

$$\text{a)} \quad \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}; \qquad \text{b)} \quad \int_0^1 \frac{e^x - 3}{e^x + 1}\, dx;$$

$$\text{c)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{\mathrm{sen}\,(x) + 2}}; \qquad \text{d)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos^2(x)}{\cos^2(x)}\, dx.$$

Esercizio 3 Si calcoli il valor medio m della funzione $f(x) = \mathrm{arctg}\,(\frac{1}{x-1})$ sugli intervalli indicati, e si stabilisca se esiste un punto x_m appartenente all'intervallo tale che $f(x_m) = m$.

a) $[2,3]$. b) $[0,2]$.

Esercizio 4 Si calcoli una primitiva F definita sull'intervallo $[0,2]$ della funzione $f(x) = \max\{1, x^2\}$.

Esercizio 5 a) Si calcoli la derivata della funzione

$$f(x) = \int_{\mathrm{sen}\,(x)}^{arctg(x)} \frac{1}{\log(t^2+2)}\, dt.$$

b) Si determini il dominio e si calcoli la derivata della funzione

$$f(x) = \int_{x(4-x)}^{0} \log(\mathrm{arctg}\,(1-t))\, dt.$$

c) Si scriva il polinomio di Taylor-MacLaurin di ordine 10 della funzione

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt.$$

Soluzioni

1. $F_{x_0}(x) - F_{x_1}(x) = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx$.
2. a) $2(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1})$. b) $4\log(\frac{e+1}{2}) - 3$. c) $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. d) $1 + \frac{\pi}{4}$.
3. a) $m = 3\,\mathrm{arctg}\,(1/2) + \mathrm{arctg}\,(2) - \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\log\frac{5}{2}$, sì. b) $m = 0$, no.
4. $F(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 & \text{se } x \in]1,2]. \end{cases}$
5. a) $\frac{1}{(1+x^2)\log(\mathrm{arctg}^2(x)+2)} - \frac{\cos x}{\log(\mathrm{sen}^2(x)+2)}$.

b) $]-\infty, 2-\sqrt{3}[\cup]2+\sqrt{3}.+\infty[$; $-\log(\mathrm{arctg}\,(1-x(4-x)))\cdot(4-2x)$.

c) $x^2 + \frac{1}{3}x^6 + \frac{1}{10}x^{10}$.