Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 31

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si usi la definizione di integrale di Riemann di una funzione su un intervallo per calcolare

$$\int_{[0,1]} x^3 \, dm.$$

Esercizio 2 Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ la restrizione della funzione parte intera ($f(x) = [x] = \max\{k \in \mathbb{N} \mid x \geq k\}$).

a) Si provi che f è integrabile.
b) Si calcoli $\int_{[0,\alpha]} f \, dm$.

Esercizio 3 Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $f : [0, \alpha] \to \mathbb{R}$ la restrizione della funzione mantissa ($f(x) = x - [x] = x - \max\{k \in \mathbb{N} \mid x \geq k\}$).

a) Si provi che f è integrabile.
b) Si calcoli $\int_{[0,\alpha]} f \, dm$.

Esercizio 4 Senza calcolare l'integrale si provi che

$$4 \leq \int_4^6 \frac{x^2}{x+2} \, dx \leq 9.$$

Esercizio 5 Si consideri la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} m & \text{se } x \text{ è un numero razionale e } \frac{m}{n} \text{ è la sua rappresentazione ai minimi termini;} \\ 0 & \text{se } x \text{ è un numero irrazionale.} \end{cases}$$

Si stabilisca se f è integrabile.

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale

$$\int_{[-1,1]} \frac{x^3 - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{arcsen}(x^2) + 2} \, dx.$$

Soluzioni

1. Si consideri la decomposizione $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $\delta_n = \{I_1, I_2, ..., I_n\}$; si ha allora $s(x^3, \delta_n) = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4n^4}$ (si veda foglio 5 es. 3 c), e quindi $\sup\{s(x^3, \delta_n) : n \in \mathbb{N}^+\} = \lim_{n\to\infty} s(x^3, \delta_n) = \frac{1}{4}$.

2. a) f è monotona; b) $1 + 2 + 3 + ... + \big([\alpha] - 1\big) + (\alpha - [\alpha])[\alpha]$.

3. a) per linearità; b) $\frac{[\alpha]}{2} + \frac{(\alpha - [\alpha])^2}{2}$.

4. Si usi il teorema della media. 5. No, f non è limitata (vedi foglio 14 es. 4). 6. 0 (la funzione è dispari su un dominio simmetrico rispetto all'origine).