Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 30

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1

a) Si verifichi che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è convessa sull'intervallo I se e solo se la funzione $-f$ è concava su I.

b) Sia f una funzione convessa. Sia $\varphi(x) = mx + q$ una funzione polinomiale di grado ≤ 1. Si provi che $f + \varphi$ è convessa.

c) Si verifichi che la funzione $f(x) = |x| + x^2$ è strettamente convessa su $\mathbb{R}$ pur non essendo ivi derivabile.

Esercizio 2

a) Si determinino gli eventuali punti di flesso della funzione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 7x - 5$.

b) Si determinino gli eventuali punti di flesso della funzione $f(x) = x^4 - \frac{3}{10}x^5 - x^3$.

c) È nota la derivata di una funzione f: $f'(x) = \cos^2(x) + 2x - 1$. Si stabilisca la natura del punto $x_0 = 0$ per la funzione f.

d) Usando la convessità si provi che, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, si ha $\log x \leq x - 1$.

Esercizio 3 Si studino le seguenti funzioni con particolare attenzione alla convessità ed ai flessi.

a) $f(x) = x^3 e^{-x}$. b) $f(x) = \frac{|x^2-x-2|}{x^2}$. c) $f(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$.

Soluzioni

1) a) e b) Si usi la definizione. c) Ad esempio si può verificare che la somma di due funzioni convesse è convessa.

2) a) In 0 flesso discendente, in 1 flesso ascendente. b) In 0 flesso discendente. Si noti che in 1 non c'e' flesso! c) 0 è punto di minimo per f. d) $x - 1$ è la retta tangente al grafico di $\log x$ nel punto $(1, 0)$.

3) a) Flessi in 0 (ascendente), $3 - \sqrt{3}$ (discendente), $3 + \sqrt{3}$ (ascendente); concava in $]-\infty, 0]$ e in $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$, convessa in $[0, 3 - \sqrt{3}]$ e in $[3 + \sqrt{3}, +\infty[$.

b) Flesso discendente in -6. Convessa su $]-\infty, -6]$, su $[-1, 0[$ e su $]0, 2]$, concava su $[-6, -1]$ e su $[2, +\infty[$.

c) Flesso ascendente in $\frac{2}{5}$, concava in $]-\infty, 0[$ e in $]0, \frac{2}{5}]$, convessa in $[\frac{2}{5}, +\infty[$.