Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 29

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si ricavino i polinomi di Taylor di ordine n nel punto $x_0 = 0$ delle funzioni non studiate esplicitamente a lezione ($\operatorname{senh}(x)$, $\cosh(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$).

Esercizio 2 a) Si calcoli un valore approssimato di $\operatorname{sen}(\frac{1}{10})$ con un errore inferiore a $\frac{1}{2}10^{-3}$.

b) Si calcoli un valore approssimato di $\log(\frac{10}{9})$ con un errore inferiore a 10^{-4}.

c) Si calcoli un valore approssimato di $\cosh(1)$ con un errore inferiore a 10^{-4}.

d) Si approssimi la funzione $\operatorname{sen} x$ sull'intervallo $[0,1]$ con un polinomio di grado n opportuno in modo tale che, detto E_n l'errore, si abbia $\sup\limits_{x\in[0,1]} |E_n(x)| < \dfrac{1}{2}10^{-3}$.

Esercizio 3 Applicando la conoscenza dei polinomi di Taylor delle funzioni elementari si ricavino i polinomi di Taylor di ordine n nel punto $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \operatorname{senh}^2(x)$, $n = 4$.

b) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$, $n = 3$.

c) $f(x) = \log(\cos x)$, $n = 4$.

Eercizio 4 a) Si verifichi che $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} = e$.

b) Si usino i polinomi di Taylor per calcolare $f^{(9)}(0)$ della funzione $f(x) = x^3 \cdot (e^{x^3} - \operatorname{sen}(x^2))$.

Soluzioni 1) Si veda nella dispensa.
2) a) Ad esempio $0,099$ o $(\frac{599}{6000})$. b) Ad esempio $0,1053$ o $(\frac{461}{4374})$. c) Ad esempio $1,5430$ o $(\frac{1111}{720})$. d) $\frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$.
3) a) $x^2 + \frac{1}{3}x^4$. b) $x + \frac{1}{8}x^3$. c) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4$.
4) a) Esiste $\xi \in]0,1[$ con $|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}| = \frac{e^\xi}{n!} < \frac{e}{n!} \to 0$. b) $6 \cdot 8!$.