Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 27

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si dimostri il teorema di de L'Hôpital nel caso in cui $\lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

Esercizio 2 a) Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione dotata di asintoto obliquo $y = mx + q$ in $+\infty$. Si supponga che esista il limite di $f'(x)$ per $x \to +\infty$. Si provi che allora

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = m.$$

b) Si consideri la funzione $f(x) = x + \log x$. Si verifichi che la funzione non ammette asintoto obliquo in $+\infty$, pur esistendo $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

c) Si consideri la funzione $f(x) = x + \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$. Si verifichi che la funzione ammette asintoto obliquo in $+\infty$ pur non esistendo $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

Esercizio 3 Si calcolino i seguenti limiti, eventualmente utilizzando il teorema di de L'Hopital:

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg}(x))^{\cos x}$; b) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$; c) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot (\operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(x))$;

d) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} \right)$. e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - x^{x\log(x^2)}}{(e^{2x}-1)\cdot(\log x)^2}$; f) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x - \frac{x^3}{3}}{2x^2 + 2x + 1 - e^{2x}}$.

Esercizio 4 Si calcoli la funzione derivata $f'(x)$, in ogni punto del dominio di f:

a) $f(x) = \begin{cases} x\log|x| & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ b) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$. c) $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{senh}(x) & \text{se } x \leq 0; \\ \cosh(x) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Esercizio 5 Si studino le seguenti funzioni:

a) $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$; b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$; c) $f(x) = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}$;

d) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x^2}$; e) $f(x) = \left| \frac{1+\log x}{x} \right|$; f) $f(x) = \frac{|e^x - 1|}{1+|x|}$.

Soluzioni

2) a) Si usi il teorema di de L'Hôpital.

3) a) 1, b) 1, c) 1, d) $\frac{1}{2}$ e) -1, f) $\frac{3}{8}$.

4) a) $f'(x) = \log|x| + 1$ se $x \neq 0$, $f'(0) = -\infty$. b) $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ se $x \in]0, \pi[$, $f'(0) = +\infty$, $f'(\pi) = -\infty$. Si ripete poi periodicamente sugli intervalli del tipo $[2n\pi, 2n\pi + \pi]$. c) $f'(x) = \cosh(x)$ se $x < 0$, $f'(x) = \operatorname{senh}(x)$ se $x > 0$, $f'_-(0) = 1$, $f'_+(0) = 0$.