Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 26

Prof. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I e tale che f' sia limitata in I. Si provi allora che esiste una costante $L \geq 0$ tale che, per ogni x_1, $x_2 \in I$, si ha

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

(Una funzione per la quale esiste una costante L con la proprietà sopra descritta si dice lipschitziana, e L è la costante di Lipschitz).

Esercizio 2 Si stabilisca se le ipotesi del teorema di Rolle sono soddisfatte per le seguenti funzioni: a) $f(x) = |x-1|$, $x \in [0,2]$. b) $f(x) = |\mathrm{sen}^3 x|$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. c) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = \begin{cases} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} & \text{se } x \in]0,1] \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

Esercizio 3 Si provi che $\mathrm{arctg}\,(x^2) \geq \dfrac{x^2}{1+x^2}$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4 Si studino le seguenti funzioni: a) $\mathrm{arctg}\,(x^3 + 2x^2 - x - 2)$. b) $f(x) = x \cdot \log|x|$. c) $f(x) = \arccos(x^2 - x^4)$. d) $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$; $f(x) = 1 - |x^3 - 1|$. e) $f : [\frac{1}{2}, 2] \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. f) $f(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$.

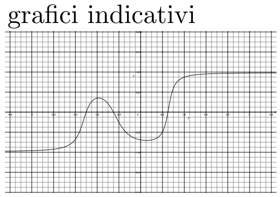
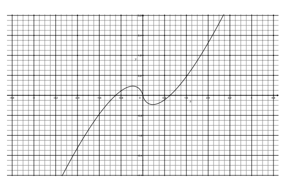
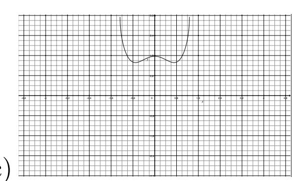
Soluzioni

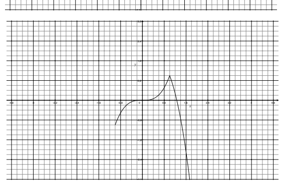
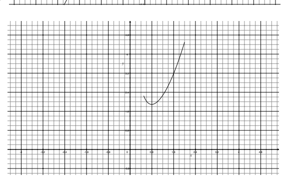
1. Si applichi il teorema di Lagrange.

2. a) No. b) Sì . c) No.

3. Si consideri la funzione $f(x) = \mathrm{arctg}\,(x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}$; si osservi che f è una funzione pari, dunque è sufficiente provare che $f(x) \geq 0$ su $[0, +\infty[$. Si calcoli la derivata e si verifichi che $f'(x) \geq 0$ se $x \geq 0$.

4. grafici indicativi

a)  b)  c) 

d)  e)  f)