

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 25

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si provi che ogni funzione $u(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, con $A \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, è soluzione dell'equazione differenziale

$$u'' + \omega^2 u = 0.$$

Esercizio 2 Si calcolino i punti critici delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

b) $f(x) = e^x - \alpha x$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + x - 1$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Si determinino i punti di estremo delle seguenti funzioni stabilendo se sono punti di minimo/massimo assoluto:

a) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

b) $f(x) = e^x - \alpha x$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + x - 1$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsen x - \frac{1}{1+x^2}$.

e) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Esercizio 4 Si vuole costruire una scatola di base quadrata; il costo del materiale per il fondo è di Euro 2 per cm quadrato, per tre delle pareti laterali è di Euro 1 per centimetro quadrato, per la parte anteriore, più preziosa, è di Euro 4 per centimetro quadrato. Il coperchio costa Euro 10 indipendentemente dalle dimensioni. Quali sono i rapporti tra le dimensioni della scatola che, a parità di volume, mi rendono minima la spesa?

Soluzioni

1. Si ha $u'' = -A\omega^2 \text{sen}(\omega x + \phi)$.

2. a) $2^{\frac{2}{3}}$. b) $\log \alpha$ se $\alpha > 0$. c) $\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 3}}{3}$ se $|k| \geq \sqrt{3}$.

3. a) $2^{\frac{2}{3}}$ punto di minimo; $\sup f = +\infty$. b) Se $\alpha > 0$ $\log \alpha$ punto di minimo, se $\alpha = 0$ $\inf f = 0$, altrimenti $\inf f = -\infty$; per ogni α $\sup f = +\infty$. c) $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$. d) 0 punto di minimo, 1 punto di massimo (la funzione è crescente!). e) Sono punti di minimo tutti i punti del tipo $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sono punti di massimo tutti i punti del tipo $x = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4. Dette x e y le misure del lato di base e dell'altezza della scatola, rispettivamente, osservato che il volume della scatola si esprime mediante l'equazione $V = x^2 \cdot y$, da cui $y = \frac{V}{x^2}$, la funzione spesa si può scrivere come $f(x) = 2x^2 + 3xy + 4xy + 10 = 2x^2 + 7\frac{V}{x} + 10$. Il minimo si ottiene quando $x = \sqrt[3]{\frac{7}{4}V}$ e $y = \frac{V}{\left(\sqrt[3]{\frac{7}{4}V}\right)^2}$, da cui si ottiene la relazione $x = \frac{7}{4}y$.