Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 24

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Si scriva l'approssimante lineare delle seguenti funzioni nel punto indicato:
a) $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 1)$, $x_0 = -1$.
b) $f(x) = \sin(3x^2)\log x$, $x_0 = 1$.
c) $f(x) = \dfrac{2x - \operatorname{sen} x}{x^2 + 4}$, $x_0 = 0$.
d) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, $\qquad x_0 = 0$.

Esercizio 2 Nella teoria della relatività la massa dipende dalla velocità secondo la formula

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dove m_0 è la massa a riposo, v è la velocità, c è la velocità della luce. L'energia cinetica relativistica si definisce come differenza $E_{\mathrm{rel}} = E - E_0$, dove $E_0 = m_0 c^2$ è l'energia a riposo ed $E = mc^2$. Si provi che in prima approssimazione l'energia relativistica è uguale all'energia cinetica classica $E = \frac{1}{2}mv^2$.

Esercizio 3 Sulla curva di equazione $y = \frac{1}{x}$, con $x \in \mathbb{R}^+$, si determini un punto P in cui la tangente sia parallela alla retta passante per i punti $A = (1, 1)$ e $B = (2, \frac{1}{2})$.

Esercizio 4 Si calcoli la derivata n-esima $f^{(n)}$ di:
a) $f(x) = \operatorname{sen} x$,
b) $f(x) = \cos x$,
c) $f(x) = xe^x$.
d) $f(x)$ è un polinomio di grado k.

Soluzioni
1. a) $\bar{f}_{[-1]}(x) = -2x - 2$. b) $\bar{f}_{[1]}(x) = \operatorname{sen}(3)(x - 1)$. c) $\bar{f}_{[0]}(x) = \frac{1}{4}x$. d) $\bar{f}_{[0]}(x) = x$.
2. Si usi la linearizzazione $(1 - x)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2}x + 1$.
3. $P = (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
4. a) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, 2, 3$ si ha $f^{(4k+i)} = \operatorname{sen} x$ se $i = 0$, $\cos x$ se $i = 1$, $-\operatorname{sen} x$ se $i = 2$, $-\cos x$ se $i = 3$.
b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, 2, 3$ si ha $f^{(4k+i)} = \cos x$ se $i = 0$, $-\operatorname{sen} x$ se $i = 1$, $-\cos x$ se $i = 2$, $\operatorname{sen} x$ se $i = 3$.
c) Si prova per induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $f^{(n)}(x) = e^x(x + n)$.
d) Se $k < n$ $f^{(n)}(x) = 0$. Se $k \geq n$ e $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$ si ha $f^{(n)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} + (n-1)(n-2)\cdots(n-k)a_{n-1}x^{n-k-1} + \ldots + k!a_k$.