

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 20

Dott. Franco Obersnel

**Esercizio 1** Si trovi l'insieme immagine delle seguenti funzioni:

a)  $f(x) = \arccos(1 - \sqrt{x-2})$ .

b)  $f(x) = \min\{e^{-x}, e^x\}$ .

c)  $f(x) = e^{2x} + \operatorname{arctg}(2x)$ .

**Esercizio 2** Sia  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  un polinomio di grado  $n$  tale che  $a_0 \cdot a_n < 0$ . Si provi che esiste almeno uno zero reale di  $p(x)$ .

**Esercizio 3** (Teorema del punto fisso di Brouwer, caso  $n = 1$ ). Sia  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  una funzione continua. Si provi che esiste almeno un punto  $x_0 \in [0, 1]$  tale che  $f(x_0) = x_0$  (un punto con tale proprietà si dice *punto fisso*).

**Esercizio 4** Si stabilisca se le seguenti funzioni ammettono minimo e/o massimo assoluti:

a)  $f(x) = \arccos(1 - \sqrt{x-2})$ .

b)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right|$ .

c)  $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$

d)  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  continua tale che  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ .

**SOLUZIONI**

Es.1 a)  $[0, \pi]$ . b)  $]0, 1]$ . c)  $] -\frac{\pi}{2}, +\infty[$ .

Es.2 Si usi in modo opportuno il teorema di esistenza degli zeri.

Es. 3 Si consideri la funzione  $g(x) = f(x) - x$ .

Es. 4 a) Entrambi. b) Ha minimo (0), non ha massimo. c) Entrambi. d) Ha minimo, non ha massimo.