

Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 19

Dott. Franco Obersnel

**Esercizio 1** Si determinino e si rappresentino nel piano di Gauss i seguenti insiemi  $E$  di numeri complessi. Si stabiliscano inoltre le principali proprietà topologiche di  $E$ , in particolare se  $E$  è aperto, chiuso, limitato, compatto, si calcolino la chiusura di  $E$ , l'insieme dei punti interni, i punti di accumulazione, i punti isolati, i punti di frontiera.

a)  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < \left| \frac{z}{z-i} \right| < 2\}$ .

b)  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im\left(\frac{z}{i\bar{z}}\right) \geq 0\}$

c)  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leq 1\} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \Re z = \Im z \in \mathbb{Q}\}$ .

d)  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z-\bar{z}}{i} \in \mathbb{Q}, |z| < 1\}$ .

e)  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |iz+1| > |2\bar{z}+i|\}$ .

f)  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + \bar{z}^2 \in \mathbb{N}\}$

**Esercizio 2**

a) Si ponga, per ogni  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$   $f(z) = \frac{z}{\bar{z}-1}$ . Si determini la controimmagine,  $f^{-1}(A)$ , dell'insieme  $A = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ .

b) Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{i(z + \bar{z})^2}.$$

Si determinino e si rappresentino nel piano di Gauss il dominio di  $f$  e l'insieme dei punti nei quali  $f(z) > 0$ , dopo aver constatato che  $f(z)$  assume solamente valori reali.

c) Si calcoli l'area del triangolo individuato nel piano di Gauss dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{z^2}{|z|} = i|z|\bar{z}.$$

**Esercizio 3**

a) Si calcoli il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(2-i)^{n-1}}{3^n}.$$

b) Si calcoli il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left( e^{\frac{1}{n}} - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{i}{n}\right) \right).$$