Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 17

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $f : E \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di E. Si provi che f è continua in x_0 se e solo se f è continua a destra in x_0 e f è continua a sinistra in x_0.

Esercizio 2 Si enuncino i teoremi algebrici sulle funzioni continue (riguardanti la restrizione, la somma, il prodotto, il quoziente di funzioni continue). Si provi inoltre che una funzione continua in un punto è ivi localmente limitata e che una funzione continua in un punto x_0 e tale che $f(x_0) > 0$ è localmente positiva in x_0 (teorema della permanenza del segno per funzioni continue).

Esercizio 3

a) Si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0, \end{cases}$ sia continua su $\mathbb{R}$.

b) È possibile determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ \alpha & \text{se } x = 0, \end{cases}$ sia continua su $\mathbb{R}$?

c) Si determinino $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ in modo tale che la funzione $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{se } x < -1, \\ \operatorname{arcsen}(x) & \text{se } x \in [-1, 1], \\ \alpha x + \beta & \text{se } x > 1, \end{cases}$ sia continua su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4

Si calcolino i seguenti limiti o si dimostri che non esistono:

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\alpha x)}{\beta x}$ per $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$; b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin|x|}{x}$;

c) $\displaystyle \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2(x)(1-\sin x)$; d) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x(1-\sin x)$.

e) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(3\operatorname{tg}(4x))}{5x}$; f) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2(x)}{\cos|x|-1}$.

g) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$; h) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2}$;

i) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$; j) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$;

k) $\displaystyle \lim_{x\to 8} \frac{x^{\frac{2}{3}}-4}{x^{\frac{1}{3}}-2}$; l) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{x+1}\left(1-\sqrt{2x+3}\right)}{7-6x+4x^2}$.

m) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x}-x$; n) $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^2-4x+4}$;

o) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^\alpha+1}-\sqrt{x^\alpha-1})$; $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 0$; p) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2x}}$

Soluzioni: 3) *a)* $\alpha = 1$, b) No, c) $\alpha = \frac{\pi}{2},\ \beta = 0$.

4) a) $\frac{\alpha}{\beta}$; b) non esiste; c) $\frac{1}{2}$; d) non esiste; e) $\frac{24}{5}$; f) -2; g) -6, h) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, i) $\frac{1}{4}$, j) non esiste, lim sinistro $-\infty$, lim destro $+\infty$; k) 4; l) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$. m) $\frac{1}{2}$; n) π^2; o) 0 se $\alpha > 2$, 1 se $\alpha = 2$, $+\infty$ se $0 \leq \alpha < 2$; p) $\sqrt[4]{e}$.