Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.
Dott. Franco Obersnel

Esercizi: foglio 14

Esercizio 1 Sia $(x_n)_n$ una successione che verifica la seguente proprietà: esiste $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tale che, se $(x_{n_k})_k$ è una sottosuccessione di $(x_n)_n$ che ammette limite $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \beta$, allora $\beta = \alpha$. Si dimostri che $(x_n)_n$ ammette limite per $n \to +\infty$ e si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

Esercizio 2

a) Sia $F \subset E \subset \mathbb{R}$. Si provi che ogni punto x_0 di accumulazione per F è anche di accumulazione per E.

b) Si provi che un punto α è di accumulazione per un insieme E se e solo se esiste una successione $(x_n)_n$ con $x_n \in E \setminus \{\alpha\}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

Esercizio 3 Si stabilisca se le seguenti funzioni sono discoste da zero:

a) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. b) $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = |\mathrm{sen}\,(\frac{1}{x})|$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{arctg}x + \frac{8}{5}$. d) $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}$, $f(\frac{m}{n}) = m$ dove $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, m e n primi tra loro.

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(\frac{m}{n}) = m$ dove $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, m e n primi tra loro. Si provi che non esiste alcun intorno U di 0 sul quale la funzione f sia limitata (cioè f non è localmente limitata in 0).

Esercizio 5 Sia A l'insieme indicato. Si dica quali sono i punti di accumulazione di A e qual è la chiusura $\overline{A}$ di A.

a) $A = \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{Z}$. b) $A = \bigcup\{]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\mid n \in \mathbb{N}^+\}$.

c) $A = \{(-1)^n - \frac{1}{n} : |n \in \mathbb{N}^+\}$. d) $A = \bigcup\{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{N}^+\}$.

Esercizio 6

a) Si provi che un unione finita di insiemi compatti è un insieme compatto.

b) Si provi che un insieme E è compatto se e solo se ogni successione $(x_n)_n$ di punti di E ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di E.

Soluzioni 1. Sia falso che $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$. Esiste allora un intorno U di α tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste $x_{n_k} \notin U$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass nel caso in cui $(x_{n_k})_k$ sia limitata e per il risultato simile che riguarda le successioni illimitate nel caso opposto la successione $(x_{n_k})_k$ deve avere una sottosuccessione con limite β. Per ipotesi $\beta = \alpha$, ma chiaramente nessuna sottosuccessione di $(x_{n_k})_k$ può avere limite α.

2. a) Sia x_0 di accumulazione per F. Sia U un intorno di x_0, allora $U \cap (F \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Ma $U \cap (F \setminus \{x_0\}) \subset U \cap (E \setminus \{x_0\})$. b) Sia α di accumulazione e si prenda, per ogni n, $x_n \in B(\alpha, \frac{1}{n}) \cap (E \setminus \{\alpha\})$. Chiaramente $(x_n)_n$ converge ad α. Viceversa sia α il limite di una successione di punti $x_n \in E \setminus \{\alpha\}$. Allora, per ogni intorno U di α definitivamente $x_n \in U$.

3. a) No. b) No. c) Sì. d) Sì.

4. Fissato un intorno $U =] - \frac{1}{k}, \frac{1}{k}[$ di 0 e un qualsiasi numero reale M, si prenda un numero primo $p > M$. Allora $\frac{p}{pk+1} \in U$ e $f(\frac{p}{pk+1}) = p > M$.

5. a) $[0, +\infty]$, $[0, +\infty[$. b) $[0, 2]$, $[0, 2]$. c) $\{-1, 1\}$, $A \cup \{-1, 1\}$. d) $[0, 1]$, $[0, 1]$.

6 a) Un'unione finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso. Infatti, sia α un punto di accumulazione di $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$, dove gli insiemi K_i sono chiusi. Proviamo che esiste j tale che α è di accumulazione per K_j. In caso contrario, per ogni $i = 1, \ldots, n$ esiste un intorno U_i di α tale che $U_i \cap (K_i \setminus \{\alpha\}) = \emptyset$. Ma allora $U = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n$ è un intorno di α e $U \cap (K \setminus \{\alpha\}) = \emptyset$, contro l'ipotesi che α è di accumulazione per K. Essendo K_j chiuso si ha $\alpha \in K_j \subset K$ Un'unione finita di insiemi limitati è un insieme limitato. Infatti, per ogni $i = 1, \ldots, n$, sia M_i tale che $|x| \leq M_i$ per ogni $x \in K_i$. Detto $M = \max\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, si ha $|x| \leq M$ per ogni $x \in K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$. b) Sia E compatto. Sia $(x_n)_n$ una successione con valori in E, poiché E è limitato, per il teorema di Bolzano-Weierstrass, la successione $(x_n)_n$ ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ convergente ad un numero reale α. Poiché E è chiuso $\alpha \in E$. Viceversa, supponiamo E non limitato. Allora possiamo trovare una successione in E divergente. Supponiamo E non chiuso, allora esiste un punto α di accumulazione per E che non appartiente ad E. Si consideri una successione di punti di E convergente ad α. Allora ogni sottosuccessione tende ad un punto (α) che non appartiene ad E.