Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 13

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 È data la successione $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \cdot 2^{\frac{1}{n}}$.

a) Si stabilisca, motivando la risposta, se la successione $(x_n)_n$ è limitata e se è monotona.

b) Si stabilisca se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$; in caso positivo lo si calcoli, in caso negativo si identifichino eventuali sottosuccessioni convergenti o divergenti.

c) Sia $A = \{x_n | n \in \mathbb{N}^+\}$. Si trovino $\sup A$, $\inf A$, e si stabilisca se sono minimo e/o massimo.

d) Si trovi $\sup A \cap \mathbb{R}^+$ e $\inf A \cap \mathbb{R}^+$.

Esercizio 2 Si tracci il grafico della funzione $f(x) = \pi - \arccos(x)$. Si consideri, per $n \in \mathbb{N}$, la successione $x_n = \pi - \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Sia $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Si trovino $\inf E$, $\sup E$ e si stabilisca se esistono minimo e/o massimo di E. Si stabilisca se la successione $(x_n)_n$ ammette limite.

Esercizio 3 È data la successione definita per ricorrenza da $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_{n+1} = \mathrm{sen}\,(x_n)$.

Si stabilisca, motivando la risposta, se la successione $\langle x_n \rangle$ è limitata, monotona, convergente, divergente.

Esercizio 4 Si usi la definizione di limite per verificare il seguente: $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 - n\,\mathrm{sen}\,(n) = +\infty$.

Esercizio 5 Sia $(x_n)_n$ una successione con infiniti termini negativi. Si provi che $(x_n)_n$ non può convergere ad un limite positivo.

Esercizio 6 Sia $(x_n)_n$ una successione con $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si provi che esiste una sottosuccessione monotona $(x_{n_k})_k$ di $(x_n)_n$ tale che $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = \alpha$.

Esercizio 7 (difficile) Sia $(x_n)_{n\geq 1}$ una successione convergente in $\mathbb{R}$ con limite α. Si consideri la successione (delle medie aritmetiche) y_n definita da

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Si provi che $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \alpha$.

Soluzioni 1. a) Limitata, non monotona. b) Non ha limite, $(x_{2k+1})_k$ converge a 0. c) $\sup A = \max A = \sqrt[4]{2}$, $\inf A = \min A = -\sqrt{2}$. d) $\sup A \cap \mathbb{R}^+ = \max A \cap \mathbb{R}^+ = \sqrt[4]{2}$, $\inf A \cap \mathbb{R}^+ = 1$, non esiste minimo di $A \cap \mathbb{R}^+$.

2. $\min E = \frac{\pi}{2}$, $\sup E = \lim_{n\to+\infty} x_n = \pi$ (non esiste massimo).

3. Poiché evidentemente $x_n \in]0, \frac{\pi}{2}]$, si ha per ogni n $x_{n+1} < x_n$. La successione è pertanto decrescente e limitata, e quindi ammette limite.

4. Fissato $M > 0$ si prenda $n_M \geq \max\{\sqrt{M}, \frac{\sqrt{M}+1}{2}\}$. Allora $n \geq \sqrt{M}$ e $2n - \mathrm{sen}\,(n) \geq \sqrt{M}$ per ogni $n \geq n_M$. Pertanto $n(2n - \mathrm{sen}\, n) \geq M$ per ogni $n \geq n_M$.

5. Se $\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha > 0$, fissato $0 < \varepsilon < \frac{\alpha}{2}$ i termini x_n sono definitivamente maggiori di $\frac{\alpha}{2} > 0$.

6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Se per ogni $j \in \mathbb{N}^+$ esiste $x_{n_j} \in]\alpha - \frac{1}{j}, \alpha]$, posso definire x_{n_k} come il minimo tra tutti gli elementi x_n tali che $x_n \in]\alpha - \frac{1}{k}, \alpha]$ (perché esiste tale minimo?); la sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ è allora crescente (debolmente) e tende ad α. Se invece esiste $j \in \mathbb{N}^+$ tale che non esiste alcun x_n nell'intervallo $]\alpha - \frac{1}{j}, \alpha]$, deve essere vero che per ogni $j \in \mathbb{N}^+$ esiste $x_{n_j} \in]\alpha, \alpha + \frac{1}{j}]$. In questo caso posso definire x_{n_k} come il massimo tra tutti gli elementi x_n tali che $x_n \in]\alpha, \alpha + \frac{1}{k}]$; la sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ è allora decrescente (debolmente) e tende ad α. Un ragionamento simile si fa nel caso $\alpha = \pm\infty$.

7. Fissato $\varepsilon > 0$ si prenda k tale che $|x_j - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $j \geq k$. Si prenda poi $n > k$ tale che

$$\frac{|x_1 - \alpha| + |x_2 - \alpha| + \ldots + |x_k - \alpha|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si ha allora

$$|y_n - \alpha| \leq \frac{|x_1 - \alpha| + |x_2 - \alpha| + \ldots |x_k - \alpha|}{n} + \frac{|x_{k+1} - \alpha| + |x_{k+2} - \alpha| + \ldots |x_n - \alpha|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-k}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$