Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.

Esercizi: foglio 12

Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Usando la definizione di limite, si verifichi l'esistenza dei seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n-1} = 1.$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \dfrac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n^3+1}\right) = 1.$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\log_2\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{2}.$

Esercizio 2 Sia $(x_n)_n$ una successione crescente e limitata di numeri reali. Si provi che $(x_n)_n$ è convergente e si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 3 Si provi che il prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata è una successione infinitesima (cioè: sia $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, $k \in \mathbb{R}$, $|y_n| \le k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; allora esiste $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n)$ e si ha $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$.)

Esercizio 4 Si studi la convergenza delle seguenti successioni (cioè si stabilisca se la successione converge, diverge o nulla di tutto ciò, senza necessariamente calcolare l'eventuale limite):

a) $\left(\dfrac{2^n}{n!}\right)_n.$ b) $\left(\operatorname{arctg}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{n}{4}\pi\right)\right)\right)_n.$

c) $(x_n)_n$, dove $x_0 = 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$. d) $\left(\left(\dfrac{1+n}{n}\right)^{-n}\right)_n.$

e) $(x_n)_n$, dove $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ e per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ $x_{n+1} = x_n - x_{n-1}$.

f) $(x_n)_n$, dove x_n è l'n-esima cifra decimale del numero π.

g) $\left(\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}\right)_n.$ h) $(n^\alpha)_n$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzioni:

Es. 1 a) Si prenda ad esempio $n > \frac{2}{\varepsilon} + 1$. b) Si ricordi la formula della progressione aritmetica e si osservi che la successione si può scrivere come $x_n = \frac{n+1}{2n}$; si prenda ad esempio $n > \frac{1}{2\varepsilon}$. c) Osservando che $\cos(\frac{1}{n^3+1}) < 1$ per ogni n è sufficiente dimostrare che $\cos(\frac{1}{n^3+1}) > 1-\varepsilon$; si può supporre che $0 < \varepsilon < 1$, così posso applicare la funzione arcocoseno che è descrescente; si ottiene $\frac{1}{n^3+1} < \arccos(1-\varepsilon)$. Si prenda ad esempio $n > \sqrt[3]{\frac{1}{\arccos(1-\varepsilon)} - 1}$ d) Osservando che $\operatorname{arctg}(\ldots) > -\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ è sempre verificata, è sufficiente mostrare che $\operatorname{arctg}(\ldots) < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$. Si prenda ad esempio $n > 2^{-\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\varepsilon - \frac{\pi}{2})}$.

Es. 2 Si usino le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore. Detto λ tale estremo, per provare che è il limite si deve mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n \ge n_0$ si ha $|x_n - \lambda| < \varepsilon$, cioè $\lambda - x_n < \varepsilon$. Per la seconda proprietà del sup, esiste un elemento, sia x_{n_0}, per cui $\lambda - x_{n_0} < \varepsilon$. Si usi poi la crescenza della successione.

Es. 3 Si prenda n_0 tale che per ogni $n \ge n_0$ si ha $|x_n| < \frac{\varepsilon}{k}$; allora per ogni $n \ge n_0$ si avrà $|x_n \cdot y_n| \le k|x_n| < \varepsilon$.

Es 4. a) Converge (decresce definitivamente ed è limitata). b) Non ammette limite. c) Converge (cresce ed è limitata). d) Converge (decresce ed è limitata). e) Non ammette limite. f) Non ammette limite. g) Converge (cresce ed è limitata). h) diverge se $\alpha > 0$, converge se $\alpha \le 0$.