**Università di Trieste – Facoltà d'Ingegneria.**

**Esercizi: foglio 11**

*Dott. Franco Obersnel*

**Esercizio 1**

a) Si scriva l'equazione del polinomio $p$ di grado $n \leq 3$ tale che $p(-1) = 0, p(0) = -2, p(1) = 0, p(2) = 3$.

b) Si scriva l'equazione del polinomio $p$ di grado $n \leq 3$ tale che $p(-1) = 2, p(0) = 1, p(1) = 0, p(2) = -1$.

**Esercizio 2** Si consideri la funzione polinomiale $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

a) Si studino eventuali simmetrie di $f$.

b) Si dimostri che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c) Si tracci un grafico indicativo della funzione $x^4 - x^2$, e si utilizzi questo per tracciare un grafico della funzione $f$.

**Esercizio 3**

a) Si scriva in base 7 il numero che in base 10 è rappresentato dalla scrittura 4581.

b) Si scriva in forma decimale il numero razionale $\frac{3}{7}$.

c) Si scriva in forma di frazione il numero razionale $1,0\overline{23}$.

d) Si consideri il numero di scrittura decimale $0,1223334444\ldots 9999999991010101010101010101010\ldots$. Si spieghi perché tale numero è irrazionale.

**Esercizio 4** Si stabilisca se le seguenti successioni sono limitate e se sono (definitivamente) monotone.

a) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n^n}\right)_n$.

b) $(x_n)_n$, dove $x_n$ è l'n-esima cifra decimale del numero $\frac{2}{3}$.

c) $(x_n)_n$, dove $x_n$ è l'n-esima cifra decimale del numero $\pi$.

d) $(200n - n^2)_n$.

e) $(\dfrac{2^n}{n!})_n$

f) $(x_n)_n$, dove $x_0 = 1$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$.

**Esercizio 5** Si provi che ogni successione definitivamente limitata è limitata.

**Soluzioni:** Es 1. a) $-\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 2$. b) $1 - x$.

Es 2. Pari. $f(x) = (x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$. Studio per $x \geq 0$; $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$ ha l'origine come zero di molteplicità 2 e 1 come zero semplice; quindi è positiva se $x > 1$ e negativa se $x \in ]0, 1[$; a destra di 1 è strettamente crescente, poiché $f$ è sempre positiva $x^4 - x^2$ è sempre maggiore di $-1$ (in realtà è chiaro che è maggiore o uguale a $-\frac{1}{4}$, ed ha minimo $-\frac{1}{4}$ nel punto $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Il grafico della $f$ si ottiene poi traslando verticalmente di un'unità.

Es 3. a) 16233. b) $0,\overline{428571}$. c) $\frac{1013}{990}$.

Es 4. a) limitata non monotona, b) limitata definit. costante, c) limitata non monotona, d) illimitata definit. decrescente, e) limitata definit. decrescente. f) limitata crescente (si provi dapprima la limitatezza per induzione, ad esempio mostrando che $|x_n| \leq 2$ per ogni $n$, e poi la crescenza provando che $x_{n+1} - x_n > 0$ per ogni $n$).

Es. 5. Sia $(x_n)_n$ limitata per $n \geq n_0$. Questo significa che esiste $K$ tale che $|x_n| \leq K$ per ogni $n \geq n_0$. Sia ora $M$ il massimo tra $K$, $|x_0|, |x_1|, |x_2|, \ldots |x_{n-1}|$. Si avrà allora $|x_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.